# 直交多項式入門

青本和彦 著

数学書房

# まえがき

“直交性 (orthogonality)” は数学，特に空間について語るのに必須の概念と言えよう．本書のテーマは直交する多項式についてである．

1939 年初版の直交多項式について書かれた名著

G. Szegö： Orthogonal Polynomials

は著者自身によるものを含めて当時までの主にヨーロッパで得られた直交多項式に関する成果を広範囲に解説している．この本はその後数回の改訂を重ねてはいるが，今日その内容の斬新さ，豊かさ，面白さにおいて光彩を失っていないように見える．私は若い頃

吉田耕作： ヒルベルト空間論

に接する機会を得た．2 階常微分方程式の固有関数展開定理を確立するにあたって自己共役作用素の “密度行列 (density matrix)” を計算する必要があるが，この定式化に成功したいわゆる小平 - Titchmarsh の定理がこの本にくわしく解説されている．この定理を確立するために有限区間での境界値問題に付随する Green 関数を区間を広げるに際して現れる R. Nevanlinna，H. Weyl らの “極限点・極限円” の考えが有効に使われている．この考え方こそ多くの数学者を魅了し，解析学としての直交多項式の発展を促した原動力のひとつではなかったかと思われる．

本書の内容の展開はある意味で上記 G. Szegö の本のそれに沿っている．後者の内容および周辺のテーマへの入門的な役割を担うことを意図している．

“直交関数系” は Hermite 作用素の固有関数系がもつ基本的な属性であるので解析学のさまざまな局面に登場する．中でも直交多項式は変数 $x$ 自身が “スペクトル” を表す特殊な状況の直交関数系しかも多項式である．それゆえに比較的扱いやすく，かつ興味ある題材を提供してきたし多分これからもそうであろう．19 世紀の P. Chebyshev，C. Jacobi，E. Christoffel，A. A. Markov，T. Stieltjes らの先駆者に始まり，20 世紀初頭の T. Carleman，F. Hausdorff，R. Nevanlinna，H. Hamburger，O. Perron，G. Szegö らを経て今日整備されて来たといえる．最近とみに発展しているランダム行列の理論とも関係が深い．

本書に登場する直交多項式はすべて実軸上の関数である．しかしその Stieltjes 変換との係わりを通じて $\mathbf{C}$ 内のある領域上の複素関数も登場する．実関数，複素関数両方にまたがった考察を必要とする．そこに直交多項式の面白さがあると言えるであろう．本書の内容の主なものはまず導入から始まって Stieltjes 測度 (重み関数) に対して定義される直交多項式の構成，直交多項式の基本的な属性である 3 項漸化式，零点分布，Gauss の機械的求積法などを解説する．

次に超幾何関数の一種である Jacobi 多項式について説明する．古くから知られていた Chebyshev 多項式，Legendre 多項式，Hermite 多項式などはすべて Jacobi 多項式に含まれるかまたは合流操作によって得られるものである．そこには特殊直交多項式としてひとつの統一的な見方がなされるようになった歴史的な背景がある．

Jacobi 多項式はさらに Sturm-Liouville 型の微分方程式を満たす．Jacobi 多項式の仲間に関するものとともにこれが第 2 のテーマである．Stieltjes 変換の (Jacobi-Perron アルゴリズムによって生ずる) Padé 近似は直交多項式そのものと深い関係がある．この算法を無限に繰り返すとき Padé 近似の収束問題が生ずる．ここに登場するのが “極限点・極限円” の考えである．さらに Stieltjes 測度の決定問題，Hilbert 空間である 2 乗総和可能な数列の空間 $\mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ に働く Jacobi 作用素の “自己共役性” の問題がからんでくる．そして自己共役な Jacobi 作用素の Green 関数が Jacobi-Perron アルゴリズムから生ずる無限連分数展開によって表示される．これらを解説するのが本書の第 3 のテーマである．

その他，古典的直交多項式の次数 $n \to \infty$ での漸近展開，有限個の帯スペクトルをもつ Stieltjes 測度と周期 Jacobi 行列の Green 関数の記述，最後に現在 Jacobi 多項式の頂点に位置すると考えられている Askey-Wilson 多項式およびその Stieltjes 変換の満たす 3 項漸化式，2 階の $q$-差分方程式，ノルムの明示式などを紹介する．

特殊関数を一価あるいは多価の解析関数の複素積分として記述した過去の日本語の書物として

　　犬井鉄郎：特殊函数

があるが，これらの内容を 1 次元のツイスト de Rham コホモロジーとして定式化し特殊直交多項式を統一的に扱うことができる．本書は一貫してこの定

式化の下に直交多項式にまつわる基本的なテーマの提示を主眼とした.

もとより本書で取り扱っていないテーマも多々存在する. 例えば, 一般の関数を直交多項式系で展開する問題, もっと複雑な重み関数に対する直交多項式の満たす関数方程式, 零点分布についてのさらに詳細な構造, Jacobi 行列の自己共役作用素への拡張問題と上半面で虚数部が正値となるような正則関数に対する Herglotz の積分表示式との係わり, 戸田方程式など可積分系との関連, Szegö の極限定理, 複素平面内の閉曲線上の直交多項式などなど. これらは本書に掲げた文献などを参考にしていただければ幸いである.

付録には Hilbert 空間と線形作用素についてのごく基本的なこと, 特に自己共役作用素のスペクトル分解定理の証明, Gauss の機械的求積法による近似, Jacobi 多項式の多重積分表示と関連が深い Selberg 積分, また解析関数の積分表示の漸近展開を与える有力な方法である鞍点法 (最急降下法) を 1 次元ツイスト de Rham コホモロジーの枠組みで捉えることなどを解説した.

直交多項式にまつわる様々な歴史的なテーマが数学の発展を促し現在も私どもにその面白さを提供している. 読者にとって本書が現代数学の理解への橋渡しの一助になれば著者の目的は達せられたことになる.

最後に議論や文献提供などを通して貴重な助言をいただいた, 伊藤雅彦, 加藤芳文, 佐々木隆の 3 氏に感謝の意を表したいと思います.

2012 年 10 月　　　　青本和彦

# 目　次

# 第 1 章

# Hermite 作用素と直交分解

第 1 章では線形代数を用いて Hermite 行列の対角化 (固有分解) についての要点を説明する.

## 1.1 Hermite 空間と直交基底

**定義 1.1** $\mathbf{C}$ (または $\mathbf{R}$) 上の $n$ 次元線形空間 $V$ に対して写像

$$F:\ V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$$

が次の条件を満たすとき $F$ は内積 (inner product) であるという. $x, y \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ (または $\mathbf{R}$) に対して

(i) $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z)$,

(ii) $F(x, y) = \overline{F(y, x)}$ (または $F(x, y) = F(y, x)$),

(iii) $F(x, x) \geq 0$ かつ $F(x, x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る.

内積をもつ空間を Hermite 空間であるという. あるいはユニタリ空間 (unitary space) ということもある.

以下内積 $F(x, y)$ を単に $(x, y)$ と略記する. また $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ とおき, $x$ のノルム (norm) または長さ, 大きさなどという.

**定義 1.2** 2 個のベクトル $x, y$ は $(x, y) = 0$ を満たすとき直交するという. $x \perp y$ と表す. また部分空間 $W$ に対して

$$(x, y) = 0 \quad (y \in W)$$

を満たすベクトル $x$ は $W$ に直交するという. このような $x$ 全体は部分空間 ($W$ の直交補空間) であり, $W^{\perp}$ で表す. また 2 個の部分空間 $W_1, W_2$ に対して

$$(x, y) = 0 \quad (x \in W_1,\ y \in W_2)$$

を満たすとき $W_1, W_2$ は直交するという．$W_1 \perp W_2$ と表す．

次の事実は基本的である．

**命題 1.3** (i)　$\{W^{\perp}\}^{\perp} = W$ が成り立つ．

(ii)　$V = W \oplus W^{\perp}$ (直和).

言い換えれば，任意の $x \in V$ に対して $y \in W, z \in W^{\perp}$ が一意に定まり

$$x = y + z.$$

$x$ に対して $y$ を対応させる写像 $P = P_W$ は線形であって $V$ から $W$ への射影作用素 (projection operator) とよばれる．

## 1.2　Hermite 作用素と射影作用素

**定義 1.4**　$V$ からそれ自身への線形作用素 $A$ が

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

を満たすとき $A$ は Hermite 作用素 (Hermitian operator)，$\mathbf{R}$ 上で考えるときには対称作用素 (symmetric operator) であるという．

**例 1.1**　数ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ において $n$ 次正方行列 $\tilde{A} = (a_{jk})_{1 \leq j,\ k \leq n}$ は線形作用素

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \quad (\text{ただし } x = (x_k) \text{ は数ベクトル})$$

を定義する．$\tilde{A}$ が Hermite 行列ならば，すなわち

$$\tilde{A} = \overline{{}^t\tilde{A}}$$

ならば $A$ は Hermite 作用素である．ここで ${}^t\tilde{A}$ は $\tilde{A}$ の転置行列 (transposed matrix) を表す．また実数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ において $\tilde{A}$ が対称行列ならば $A$ は対称作用素を定義する．

以下では行列 $\tilde{A}$ と作用素 $A$ を区別しないことにする．

**命題 1.5** 命題 1.3 で定義した射影作用素 $P = P_W$ は次の性質をもつ:

(i) $P$ は Hermite 作用素である.

(ii) $P^2 = P$.

逆に線形作用素 $P$ が (i), (ii) を満たすならば $V$ の部分空間 $W$ が存在して $P$ は $V$ から $W$ への射影作用素である.

(iii) $I - P = P_{W^\perp}$.

さらに $W_1 \subset W_2$ を満たす 2 個の部分空間 $W_1, W_2$ に対して

(iv) $P_{W_1} P_{W_2} = P_{W_2} P_{W_1} = P_{W_1}$

が成り立つ. また逆もいえる. このとき $P_{W_1} \leq P_{W_2}$ と表す. 射影作用素全体はこの順序 (order) に関して半順序集合 (ordered set) である. 最大なものは $I$ (恒等作用素), 最小なものは 0 (ゼロ作用素) である.

**命題 1.6** (i) Hermite 作用素 $A$ の固有値はすべて実数である.

(ii) $A$ の相異なる固有値 (eigenvalue) $\alpha, \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $x, y$ とするとき $x, y$ は直交する.

(iii) $A$ の相異なるすべての固有値を $\lambda_k$ $(1 \leq k \leq r)$ とする. $\lambda_k$ に応ずる固有空間を $V_k$ とするとき

$$V_j \perp V_k \ (j \neq k) \quad \text{かつ} \quad V = \bigoplus_{k=1}^{r} V_k$$

が成り立つ. $x \in V$ に対して

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k \quad (x_k \in V_k)$$

とすれば

$$Ax = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

と表される. $V$ から $V_k$ への射影作用素を $P_k$ で表せば

$$P_k^2 = P_k, P_j P_k = 0 \ (j \neq k), \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = I, A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k \tag{1.2}$$

が成り立つ.

**定義 1.7**　$V$ の基底 $\{e_k\ (1 \leq k \leq n)\}$ において $e_k$ が互いに直交しているとき $\{e_k\ (1 \leq k \leq n)\}$ は直交基底 (orthogonal basis) であるという．さらに $||e_k|| = 1$ を満たすとき正規直交基底 (orthonormal basis) であるという．

**補題 1.8**　$V$ を Hermite 空間，$W$ をその部分空間とする．$\dim W = r$ とし，$W$ の正規直交基底を $e_1, \cdots, e_r$ とすれば

$$P_W x = \sum_{k=1}^{r} (x, e_k) e_k$$

と表される．

命題 1.6 において各々 $V_k$ の正規直交基底を集めて $V$ の直交基底を得る．それゆえ次の定理を得る．

**定理 1.9**　各ベクトル $e_k$ が $A$ の固有ベクトルであるような $V$ の正規直交基底 $e_k\ (1 \leq k \leq n)$ が存在する:

$$Ae_k = \lambda_k^* e_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (\lambda_k^* \in \mathbf{R}), \tag{1.3}$$

すなわち $A$ は対角化できる．

**問 1.1**　次の Hermite 作用素の固有値，固有ベクトル，射影作用素を求め (1.1), (1.2) のような表示を明示的に求めよ．

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{pmatrix}$　(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1.1), (1.2) は以下のようにも表される．$A$ の固有値はすべて実数であるから相異なる固有値を増大数列として並べることができる:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r.$$

固有値 $\lambda_k$ の固有空間を $V_k$ とする．

$$W_k = \bigoplus_{j=1}^{k} V_j$$

とおけば増大する部分空間の列 $W_k$ が得られる:

$$\{0\} \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_r = V.$$

$W_k$ への射影作用素を $\tilde{P}_k$ とおくとき $\tilde{P}_k$ は順序 $\leq$ に関して増大列をなす:

$$0 = \tilde{P}_0 < \tilde{P}_1 < \cdots < \tilde{P}_r = I.$$

さらに $\tilde{P}_k - \tilde{P}_{k-1} = P_{V_k}$ である．いま射影作用素を値域とする $\mathbf{R}$ 上の単調増大写像 $E(\lambda)$ を

$$E(\lambda) := \tilde{P}_k \quad (\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

(ただし $\lambda_0 = -\infty, \lambda_{r+1} = \infty$ とおく) によって定義すれば $E(\lambda)$ は右連続

$$E(\lambda + 0) = E(\lambda)$$

かつ $E(\lambda_k) - E(E_{\lambda_{k-1}}) = P_{V_k}$ であるから，(1.2) は

$$0 = E(-\infty),\ I = E(\infty),\ A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \tag{1.4}$$

と表される．(1.4) は $A$ のスペクトル分解 (spectral decomposition) という．

第 2 章

# 直交多項式とは

第 2 章では簡単な実例を提示して直交多項式とはどのようなものかを説明する.

## 2.1 Chebyshev 多項式の場合

関数系 $\{\cos n\theta,\ n = 0,1,2,\cdots;\ \sin n\theta,\ n = 1,2,3,\cdots\}$ は次の直交関係 (orthogonality relation) を満たす:

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = 0 \quad (n,m \geq 0,\ n \neq m), \tag{2.1}$$

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = 0 \quad (n,m \geq 1,\ n \neq m), \tag{2.2}$$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \sin m\theta \, d\theta = 0 \quad (n \geq 0,\ m \geq 1). \tag{2.3}$$

さらに

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta \, d\theta = \pi \quad (n = 0), \tag{2.4}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (n > 0), \tag{2.5}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (n > 0). \tag{2.6}$$

**定義 2.1** $x = \cos\theta$ とおくとき $\cos n\theta$ は $x$ について $n$ 次多項式である. これを $T_n(x)$ で表し, $n$ 次第 1 種 Chebyshev 多項式という. すなわち

$$\cos n\theta = T_n(x) \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

同じく $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ は $x$ の $n$ 次多項式である. これを $n$ 次第 2 種 Chebyshev

多項式という．これを $U_n(x)$ で表す:

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

**例 2.1**

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,\ U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x; \text{etc.}$$

**命題 2.2** Chebyshev 多項式の最高次係数について次が成り立つ:

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots \quad (n \geq 1),$$

$$U_n(x) = 2^n x^n + \cdots \quad (n \geq 0).$$

**証明.** 実際

$$x = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

に注意して，2 項定理より

$$x^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2^n} + \cdots.$$

これより

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = 2^{n-1}x^n + \cdots.$$

また

$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\cos n\theta \sin\theta.$$

両辺を $\sin\theta$ で割って

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x).$$ □

次の命題は，命題 2.2 からただちに導かれる．

**命題 2.3**　$x^n$ は $T_m(x)$ $(0 \leq m \leq n)$ の 1 次結合で表される．同じく $x^n$ は $U_m(x)$ $(0 \leq m \leq n)$ の 1 次結合で表される．

**問 2.1**　$x, x^2, x^3, x^4, x^5$ を $T_m(x)$ の 1 次結合で表せ．同じく $U_m(x)$ の 1 次結合で表せ．

(2.1), (2.4), (2.5) は積分変数変換により次のように表される:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad (n, m \geq 0,\ n \neq m), \tag{2.7}$$

$$\int_{-1}^{1} T_0^2(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi, \tag{2.8}$$

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \quad (n > 0). \tag{2.9}$$

これらの関係は直交関係 (orthogonal relations) とよばれる．

また (2.2), (2.6) は直交関係

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0 \quad (n, m \geq 0,\ n \neq m), \tag{2.10}$$

$$\int_{-1}^{1} U_n^2(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2} \quad (n > 0) \tag{2.11}$$

を満たす．

**問 2.2**　$T_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots, 5)$ のすべての零点を求めよ．また極大値，極小値を求めよ．

**問 2.3**　$U_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots, 5)$ のすべての零点を求めよ．また極大値，極小値をすべて求めよ．

**問 2.4**　$T_n(x), U_n(x)$ の $x^{n-1}$ の係数を求めよ．また $T_n(0), U_n(0)$ を求めよ．

**問 2.5**　$y = T_n(x), U_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots, 5)$ のグラフを描け．

## 2.2　Legendre の多項式 $P_n(x)$

**定義 2.4**　$t$ に関するベキ級数

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \quad (|t|<1) \tag{2.12}$$

における係数 $P_n(x)$ を Legendre の多項式という． $P_n(x)$ は $n$ 次多項式である．

$|t|$ が十分小として (2.12) の左辺を 2 項級数展開すれば

$$\begin{aligned}
&(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (1-(2tx-t^2))^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+m-1)}{m!}(2tx-t^2)^m \\
&= 1+tx+t^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2\right)+t^3\left(-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3\right)+\cdots,
\end{aligned}$$

すなわち,

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2,\ P_3(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3, \cdots$$

$P_n(x)$ は次のようにも表示される:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n. \tag{2.13}$$

これを Rodrigues の公式という．

**証明.** 実際 (2.13) の右辺は Cauchy 積分定理により

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_x}(u-x)^{-n-1}(u^2-1)^n du \tag{2.14}$$

に等しい．ただし $\sigma_x$ は, $x$ を正の向きに回る小輪体 (loop) を表す．ここで変数変換 $\dfrac{u-x}{u^2-1}=\dfrac{t}{2}$ とおく．逆に解いて

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-2tx+t^2}}{t}.$$

$t=0$ のとき $u=x$ となるようにするには

$$u = \frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t}$$

ととらねばならない．さて等式

$$\frac{1}{u-x}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

が成り立つ．ゆえに (2.14) は

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_0} t^{-n-1}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}dt$$

に等しい． □

**問 2.6** (2.13) を利用して $P_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots,5)$ を求めよ．

**命題 2.5** 次の直交関係式が成り立つ:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}. \tag{2.15}$$

**証明.** $0<t<1, 0<\tau<1$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2\tau x+\tau^2)^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}(t\tau)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{t\tau}}\log\frac{1+\sqrt{t\tau}}{1-\sqrt{t\tau}}
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せばよい．実際これは積分公式

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}((a-x)(b-x))^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \log\left|\frac{a+b-2-2\sqrt{(a-1)(b-1)}}{a+b+2-2\sqrt{(a+1)(b+1)}}\right| \quad (a,b>1)
\end{aligned}$$

に帰着する． □

## 2.3 Hermite 多項式 $H_n(x)$

**定義 2.6** $t$ に関するベキ級数展開:

$$\exp(2tx-t^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \quad (|t|<\infty)$$

とおいて得られる $n$ 次多項式 $H_n(x)$ は Hermite 多項式という．

左辺は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2tx - t^2)^m}{m!} = 1 + 2tx + t^2(-1 + 2x^2) + t^3 \left(-2x + \frac{4}{3}x^3\right) + \cdots$$

と展開されるので

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 2(2x^2 - 1),\ H_3(x) = 4(2x^3 - 3x), \cdots$$

$H_n(x)$ はまた次のようにも表される:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}. \tag{2.16}$$

実際 $2tx - t^2 = x^2 - (t-x)^2$ に注意して積分変換 $u = x - t$ を施すと

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{t=0} t^{-n-1} e^{2tx - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{t=0} t^{-n-1} e^{x^2 - (x-t)^2} dt \\ &= (-1)^n e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{u=x} (u - x)^{-n-1} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

この右辺は Cauchy の積分定理により (2.16) の右辺に等しい.

**問 2.7** (2.16) を利用して $H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, 5)$ を求めよ.

**定理 2.7** 直交関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!\, \delta_{n,m}. \tag{2.17}$$

が成り立つ.

**問 2.8**
$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

とおくとき

$$c_{2m+1} = 0, \quad c_{2m} = \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi} \tag{2.18}$$

となることを示せ (ガンマ関数 $\Gamma(z)$ については定義 8.1 を参照).

**問 2.9** 等式 (2.17) を $n, m \leq 3$ の場合に確かめよ. (ヒント : 等式 (2.18) を使う.)

**問 2.10**　等式 (2.17) を証明せよ.

## 2.4　Lie 群と直交多項式

直交多項式の中には Lie 群の表現論と深く関係しているものがある. 以下 2 個の例を述べる.

**例 2.2** (Lie 群 $G = SU(2)$ の表現と第 2 種 Chebyshev 多項式)

$V_m$ $(m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ は $\mathbf{C}^2$ 上の $m$ 次同次多項式からなる $m+1$ 次元線形空間を表すものとする. $G$ の元 $g$ は $2 \times 2$ の行列

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1,\ a, b \in \mathbf{C})$$

の形に表される. $\varphi \in V_m$ に対して

$$\rho_m(g)\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$$

と定義すれば $\rho_m$ は $G$ の既約な線形表現である. すなわち

$$\rho_m(e) = I,\ \rho_m(g_1 g_2) = \rho_m(g_1)\rho_m(g_2)\ (g_1, g_2 \in G)$$

を満たす. $G$ の対角行列からなる $G$ の極大トーラス $\mathbf{T}$ の元

$$h(\theta) = \mathrm{diag}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}] \quad (\in \mathbf{T},\ (-\infty < \theta < \infty))$$

に対する $\rho_m$ の指標 (character) は $\mathbf{T}$ 上の $\rho_m(h)$ の跡 (trace)

$$\chi_m(\theta) = Tr\rho_m(h) = \sum_{k=0}^{2m} e^{i(m-2k)\theta} = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \tag{2.19}$$

に等しい. これは変数 $x = \cos\theta$ に関する $m$ 次の第 2 種 Chebyshev 多項式に他ならない.

**問 2.11**　等式 (2.19) を示せ.

**注意 2.1**　このような指標の表す多項式は <u>Schur 多項式</u> とよばれ, 群 $SU(n)$ $(n \geq 2)$ に拡張される. $SU(n)$ の極大トーラス $\mathbf{T}$ は成分が $e^{i\theta_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ か

つ $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$ を満たす対角行列 $h = \mathrm{diag}[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]$ からなり，Schur 多項式は $SU(n)$ の既約表現 $\rho$ の指標 (character) に等しく $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}$ の対称多項式である．2 個の相異なる既約表現は互いに直交するので Schur 多項式は $\mathbf{T}$ の測度

$$d\omega = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{n-1}$$

に関して直交多項式である (文献 [KO], [We2] 参照).

**例 2.3** (帯球関数としての Legendre 多項式)

3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ の長さを

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

で表す．ベクトル $a = (0,0,1)$ と $x$ との距離 $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2}$ の逆数は調和関数 (Newton ポテンシャル) であって次の Laplace の方程式を満たす．すなわち Laplace 作用素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}$$

に対して

$$\Delta \frac{1}{R} = 0.$$

極座標 $x_1 = \sin\theta\cos\varphi, x_2 = \sin\theta\sin\varphi, x_3 = \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ を導入すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

と表される．さらに $\Delta$ は

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\overline{\Delta}$$

と表される．ここで $\overline{\Delta}$ は単位球面 $S$ 上の Laplace-Beltrami 作用素であって

$\theta, \varphi$ を用いて

$$\overline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

と表される．$u(r,\theta) = r^n P_n(\cos\theta)$ は

$$\Delta u = 0$$

を満たし，$P_n(\cos\theta)$ は $S$ 上の関数として $\theta$ のみに依存する，$\overline{\Delta}$ の固有値 $-n(n+1)$ の固有方程式を満たす:

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta}\, P_n(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta) \\
&= \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d}{d\theta} + n(n+1)\right) P_n(\cos\theta) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$\overline{\Delta}$ の異なる固有値に属する 2 個の固有関数は球面上の測度 $d\omega = \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$ に関して直交するので関数 $P_n(\cos\theta)$ は測度 $\sin\theta\, d\theta$ に関して直交関数である．

**問 2.12**　等式 (2.20) を示せ．

**注意 2.2**　$S$ 上の $\overline{\Delta}$ の固有関数は球関数 (spherical function)，特に $\theta$ のみに依存する球関数は帯球関数 (zonal spherical function) とよぶ．

球面 $S$ は Lie 群 $SO(3;\mathbf{R})$ が遷移的に作用する対称空間であるが，これを拡張して $SO(m;\mathbf{R})$，さらに一般の Lie 群が遷移的に作用する対称空間上に直交関数系として球関数および帯球関数を定義することができる (文献 [KO] 参照)．

# 第 3 章

# 直交関数系

第 3 章では直交多項式系の拡張である直交関数系の定義を与え，その実例を提示する (文献 [EMOT], [HA], [KF], [Takah] 参照).

## 3.1　直交関数系

直交関係は多項式に限らない.

閉区間 $[a,b]$ 上の正または 0 値関数 $w(x)$ が与えられているとき，$[a,b]$ 上の (一般には複素数値) 連続関数 $f(x), g(x)$ に対して内積 (inner product)

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx \tag{3.1}$$

が定義される.

$[a,b]$ 上の連続関数 $f(x), g(x)$ が $(f,g)=0$ を満たすとき $f, g$ は直交するという．$f \perp g$ で表す．$\sqrt{(f,f)}$ を $f$ のノルム (長さ，大きさ) といい，$||f||$ で表す.

**定義 3.1**　$[a,b]$ 上の関数列 $\{\varphi_n(x),\ n=0,1,2,3,\cdots\}$ が

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad (n \neq m) \tag{3.2}$$

を満たすとき $\{\varphi_n(x)\}$ は直交関数系 (orthogonal system of functions) であるという．さらに

$$||\varphi_n|| = 1 \tag{3.3}$$

を満たすとき正規直交関数系 (orthonormal system of functions) であるという.
(3.1), (3.2), (3.3) はまとめて

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} \quad \text{(Kronecker のデルタ)}$$

と表される.

正規直交系 $\varphi_n(x)$ に対して Fourier 級数の部分和の類似

$$S_n(x;\ f) = \sum_{m=0}^{n} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(x) \tag{3.4}$$

および収束する場合にはその極限値

$$S(x;\ f) = \lim_{n\to\infty} S_n(x;\ f) = \sum_{m=0}^{\infty} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(x) \tag{3.5}$$

を考えることができる. これらは正規直交級数 (orthonormal series) という.

**例 3.1**　$[0,1]$ において

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \tag{3.6}$$

と定義すると

$$(e^{2ni\pi x}, e^{2mi\pi x}) = 0\,(n \neq m), \quad (e^{2ni\pi x}, e^{2ni\pi x}) = 1,$$

すなわち $e^{2ni\pi x} \perp e^{2mi\pi x}$ かつ $\|e^{2ni\pi x}\| = 1$ であるから $e^{2ni\pi x}$ $(-\infty < n < \infty)$ は正規直交系をなす. この場合 $S(x;\ f)$ は Fourier 級数 (Fourier series) そのものである.

次の定理は Dirichlet の条件を起源とする Fourier 級数の古典的な定理として知られる (文献 [Takah], [Zy] 参照):

**定理 3.2**　$(-\infty, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ が周期条件

$$f(x+1) = f(x)$$

を満たし, かつ有界変分ならば

$$S(x;\ f) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

である.

**例 3.2** $[0,1]$ 上定義された階段関数 (step function) $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 \le x < \dfrac{1}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{1}{2} \le x < 1\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に対して

$$\chi_{m,k}(x) = 2^{m/2}\chi(2^m x - k) \quad (0 \le k \le 2^m - 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおく ($\chi_{0,0}(x) = \chi(x)$ に注意). また

$$\chi_{-1}(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおく. このとき

$$\int_0^1 \chi_{-1}^2(x)dx = 1; \ \int_0^1 \chi_{-1}(x)\chi_{m,k}(x)dx = 0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^1 \chi_{m,k}(x)\chi_{n,l}(x)dx = \delta_{m,n}\delta_{k,l} \tag{3.8}$$

が成り立つ. すなわち $\chi_{-1}(x), \chi_{m,k}(x)$ は内積 (3.6) に関して正規直交系をなす.

関数系 $\chi_{-1}(x), \chi_{m,k}(x)$ を Haar の直交関数系といい, ウエーブレット (wavelet) のもっとも原始的な場合である (文献 [HA], [Wo] 参照).

**問 3.1**

$$\chi_{2,0}, \quad \chi_{2,1}, \quad \chi_{2,2}, \quad \chi_{2,3}$$

のグラフを描け.

**問 3.2** $m \le 2$ のとき等式 (3.7), (3.8) が成り立つことを示せ.

**定義 3.3** $[0,1)$ 上の区分的に連続な関数 $f(x)$ に対して

$$S_m(x,f) = (f, \chi_{-1}) + \sum_{n=0}^{m}\sum_{l=0}^{2^n-1}(f, \chi_{n,l})\chi_{n,l}(x)$$

と定義する. また $\lim\limits_{m\to\infty} S_m(x,f)$ が収束するならば, その極限として, Haar 関

数による直交展開 (Haar 展開)

$$S(x,f)=(f,\chi_{-1})+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{2^n-1}(f,\chi_{n,l})\chi_{n,l}(x) \tag{3.9}$$

が定義される.

次の事実は容易に示される:

**定理 3.4**　$f(x)$ が $[0,1)$ 上の階段関数 (ただし $f(x+0)=f(x)$) であってその不連続点は $x=k/2^n$ $(0\leq k\leq 2^n, n=0,1,2,\cdots)$ のみとする. このとき

$$S(x;\,f)=f(x) \tag{3.10}$$

である.

**問 3.3**

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(\dfrac{3}{8}\leq x<\dfrac{5}{8}\right)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

のとき (3.9) を求め, 等式 (3.10) を確かめよ.

# 第 4 章

# 重み関数と直交多項式

第 4 章では重み関数に対するヒルベルト空間を定義し，直交関数系の完備性について説明する．

## 4.1　重み関数と Hilbert 空間

閉区間 $[a, b]$ 上で定義された定数でない単調増大 (非減少) 関数 $\rho(x)$ は 無限個の増大点を持つ，すなわち $\rho(x_j) \neq \rho(x_k)$ $(j \neq k)$ を満たす無限個の点列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ が存在するものとする．

さらに $\rho(x)$ はすべての点で右連続と仮定する．すなわち

$$\rho(x+0) = \rho(x).$$

$d\rho(x)$ は区間 $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$ に対してそれぞれ大きさ $\rho(\beta - 0) - \rho(\alpha), \rho(\beta) - \rho(\alpha), \rho(\beta - 0) - \rho(\alpha - 0), \rho(\beta) - \rho(\alpha - 0)$ を与えることにより $[a, b]$ 内のすべての Borel 集合に対して定義される Radon 測度を与える．これを Stieltjes 測度ともいう．

$[a, b]$ 上の (一般には複素数値) 連続関数 $f(x), g(x)$ に対して内積 (inner product)

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}d\rho(x) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\overline{g(x_k)}(\rho(x_k) - \rho(x_{k-1}))\end{aligned}$$

が定義される．ここで $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ は $[a, b]$ の分割を表し，$\delta = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$ とする．これは Riemann-Stieltjes 積分による内積の定義である．$f(x), g(x)$ が Borel 可測ならば Lebesgue 式定義により Lebesgue-Stieltjes

積分が定義される．詳細は文献 [GM], [KF], [Ts], [Takah] などを参照．

$[a,b]$ 上の Borel 可測関数 $f(x), g(x)$ が $(f,g)=0$ を満たすとき $f,g$ は直交するといい $f \perp g$ で表す．$\sqrt{(f,f)}$ を $f$ のノルム (長さ，大きさ) といい，$||f||$ で表す．

**定義 4.1**

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\rho(x) < \infty \tag{4.1}$$

を満たす関数 $f(x)$ を "ほとんど到るところ等しい" という同値類で考えたもの全体は Hilbert 空間 $L^2_\rho[a,b]$ を成す (付録 A1 参照)．

**注意 4.1** "関数 $f(x) \in L^2_\rho[a,b]$ が空間の要素として 0 である" ということは "$f(x)$ が $[a,b]$ 上ほとんど到るところ 0 に等しい" すなわち

$$||f|| = 0$$

ということであり，必ずしも "恒等的に 0 である" ということではない．

**定理 4.2** $L^2_\rho[a,b]$ はノルムに関して完備 (complete) な線形空間である．すなわち次の完備性を満たす:

$L^2_\rho[a,b]$ の要素からなる任意の Cauchy 列 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$\lim_{n,m\to\infty} ||f_n - f_m|| = 0$$

はつねに極限を持つ．すなわち $L^2_\rho[a,b]$ のある要素 $g(x)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - g|| = 0$$

が成り立つ．すなわち $L^2_\rho[a,b]$ は Hilbert 空間である (文献 [Ar], [KF], [Takah] 参照)．

**定義 4.3** (離散的重み関数)　$\rho(x)$ は不連続点 $c_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$, $c_1 < c_2 < \cdots$ $(\rho(c_k) > 0)$ を持つ単調増大な階段関数とする．このとき

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\rho(c_k) - \rho(c_{k-1})\} f(c_k) \overline{g(c_k)}$$

で与えられる．ただし $c_0 = -\infty$ で $\rho(-\infty) = 0$ と仮定する．

**例 4.1** $a > 0$ とする.

$$\rho(c_k) - \rho(c_{k-1}) = \frac{e^{-a}a^k}{(k-1)!} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で与えられる階段関数 $\rho(x)$ は Poisson-Charlier の重み関数という. $\rho(\infty) = 1$ である (9.4 節参照).

**定義 4.4** (絶対連続 Stieltjes 測度) $\rho(x)$ が絶対連続 (absolutely continuous) かつ単調非減少ならば $w(x) = \rho'(x)$ (微分) は非負の可積分関数である (文献 [KF], [Ts] 参照). 内積は

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

で与えられる. $w(x)$ は "重み関数 (weight function)" あるいは "密度関数 (density function)" とよばれる.

**例 4.2** Chebyshev 多項式 $T_n(x), U_n(x)$ の重み関数は $[-1, 1]$ においてそれぞれ

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \sqrt{1-x^2}$$

であって

$$\rho(x) = \int_{-1}^x w(t)dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

は絶対連続関数である.

## 4.2 直交関数系の完備性

**定理 4.5** Hilbert 空間 $L^2_\rho[a, b]$ において正規直交関数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 1}$ は, 任意の関数 $f(x) \in L^2_\rho[a, b]$ に対して不等式

$$||f||^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \tag{4.2}$$

を満たす. これを Bessel の不等式という.

**定義 4.6**　(4.2) において等式が成り立つとき，すなわち

$$||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \tag{4.3}$$

が成り立つとき $\{\varphi_n(x)\}$ は完備な正規直交関数系 (complete system of orthonormal functions) であるという．(4.3) は Parseval の等式という．このとき

$$\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m)\, \varphi_m|| = 0$$

が成り立つ．すなわち $S_n(x;\, f) = \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(x)$ は $L^2_\rho[a,b]$ において $f(x)$ に (平均) 収束する (limit in the mean).

**例 4.3**　$L^2[0,1]$ において正規直交関数族 $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$ $(-\infty < n < \infty)$ は完備である．実際 $f(x) \in L^2[0,1]$ の Fourier 係数

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = (f, \varphi_n)$$

に対して Parseval の等式

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

および平均収束

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 |f(x) - S_N(x;\ f)|^2 dx = 0$$

が成り立つ．ただし

$$S_N(x;\ f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x}.$$

## 第 5 章

# Hankel 行列式

第 5 章では Stieltjes 測度 (重み関数) のモーメントおよび Hankel 行列式を定義し，Hankel 行列式の正値性の十分条件を与える．

## 5.1　モーメントと Hankel 行列式

閉区間 $[a,b]$ 上で定義された単調増大関数 $\rho(x)$ は無限個の増大点を持つものとする．$a=-\infty$ あるいは $b=\infty$ の場合も許容する．以下では主に $d\rho(x)=w(x)dx$ が絶対連続の場合を考察する．

条件

$$\int_a^b |x^n|d\rho(x) < \infty \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を仮定する．

**定義 5.1**

$$c_n = \int_a^b x^n d\rho(x) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を $d\rho(x)$ のモーメント (moment) という．

**例 5.1**　$[a,b]$ 上で $w(x)=1$ の場合

$$c_n = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

である．

**例 5.2**　$[0,1]$ 上で $w(x)=1/\sqrt{x(1-x)}$ の場合 (第 8 章のベータ関数を参照)．

$c_0=\pi$ および漸化式

$$c_n = \frac{2n-1}{2n} c_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ．これより

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \pi$$

**問 5.1**　$w(x) = \sin(\pi x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ の場合

(i)　$c_0, c_1$ を求めよ．

(ii)　漸化式

$$c_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} c_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

を示せ．

(iii)　$c_2, c_3, c_4, c_5$ を求めよ．

(iv)　$c_n$ の一般式を $n$ を偶数の場合と奇数の場合に分けて求めよ．

**問 5.2**　$[0,1]$ 上の関数

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}\right), \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right), \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \left(\frac{2}{3} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

のモーメント $c_n$ を求めよ．

**定義 5.2**　$(i,j)$ 成分 $(i,j \geq 0)$ が $c_{i+j}$ である無限次対称行列 $(c_{i+j})_{i,j\geq 0}$ を Hankel 行列という．$n+1$ 次行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を $n$ 次 Hankel 行列式という．

以後 $D_n = \det(c_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$ と書く．

**例 5.3** 例 5.1 で $a=0, b=1$ のときは

$$D_0 = 1,\ D_1 = \frac{1}{12},\ D_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5}$$

となっている. $D_n$ の一般式は

$$D_n = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{2k}{k}^2}$$

となる (問 6.1 参照).

次に $D_n$ はすべて正値であることを示す.

**補題 5.3** $n$ 次 Hermite 正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ は対角化される. すなわち, 適当な $n$ 次ユニタリ行列 $U$ を用いて

$$A = UDU^{-1}$$

と表される. ここで $D$ は実対角行列 $D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ を表す.

**定義 5.4** $n$ 次 Hermite 正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ は任意の複素数 $z_j$ $(1 \leq i \leq n)$ について不等式

$$\mathbf{z}A\,{}^t\overline{\mathbf{z}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i \overline{z_j} \geq 0$$

を満たすとき非負定値 (non negative definite), あるいは半正定値 (positive semi-definite) であるという. さらにベクトル $\mathbf{z} = (z_j)_j$ が零ベクトルでないならば不等式

$$\mathbf{z}A\,{}^t\overline{\mathbf{z}} > 0$$

を満たすとき正定値 (positive definite) であるという.

**補題 5.5** (i) $A$ が半正定値であることの必要十分条件は $A$ の固有値がすべて非負であることである.

(ii) $A$ が正定値であることの必要十分条件は $A$ の固有値がすべて正であることである.

補題 5.5 より正定値行列の行列式はすべて正である.

**命題 5.6**　すべての $n$ について

$$D_n > 0$$

である.

**証明**. まず $n+1$ 次正方行列 $(c_{i+j})_{0 \le i,j \le n}$ は正定値行列であることに注意する. 実際, $w(x)$ に関する仮定により, すべてが 0 には等しくない変数 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ に対して $t = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ についての 2 次形式 $\varphi(t)$ は

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{i,j=0}^{n} c_{i+j} t_i t_j \\
&= \sum_{i,j=0}^{n} t_i t_j \int_a^b w(x) x^{i+j} dx \\
&= \int_a^b w(x) \left( \sum_{j=0}^{n} t_j x^j \right)^2 dx > 0
\end{aligned}$$

である. ゆえに $D_n > 0$ が成り立つ. □

# 第 6 章

# 直交多項式の構成

第 6 章では Stieltjes 測度 (重み関数) のモーメントを用いて直交多項式系を構成する Gram-Schmidt の直交化を説明し，直交多項式の多重積分表示を与える．

## 6.1 Gram-Schmidt の直交化

閉区間 $[a,b]$ 上で定義された単調増大関数 $\rho(x)$ は無限個の増大点を持つものとする．以下主に密度 $d\rho(x) = w(x)dx$ ($w(x)$ 重み関数) の場合を考察する．

関数はすべて実数値関数と仮定する．内積

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)d\rho(x) < \infty$$

に対して次の 2 条件を満たす $n$ 次多項式 $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を構成することができる:

(i)　$p_n(x)$ の最高次係数 $k_n$ は正である:

$$p_n(x) = k_n x^n + \cdots \quad (k_n > 0).$$

(ii)　$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ は正規直交関数系である．すなわち

$$(p_n, p_m) = \delta_{n,m}$$

を満たす．すなわち $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ は正規直交多項式系 (orthonormal system of polynomials) である．

$p_n(x)$ の構成は次の通り漸化的に行うことができる:

$$p_0(x) = \frac{1}{||1||} = \frac{1}{\sqrt{c_0}} = k_0.$$

次に

$$p_1(x) = k_{10}p_0(x) + k_1 x \quad (k_1 > 0)$$

が

$$(p_1, p_0) = 0,\ (p_1, p_1) = 1$$

を満たすように決める:

$$(p_1, p_0) = 0 \Longrightarrow k_{10} + k_1(p_0, x) = 0 \Longrightarrow k_{10} = -k_1(p_0, x).$$

すなわち,

$$p_1(x) = k_1\{-(p_0, x)p_0(x) + x\},$$

$$(p_1, p_1) = 1 \Longrightarrow k_1^2\{-(p_0, x)^2 + (x, x)\} = 1,$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{(x, x) - (p_0, x)^2}} = \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2 - c_1^2}}.$$

ゆえに

$$p_1(x) = \frac{c_0 x - c_1}{\sqrt{c_0(c_0c_2 - c_1^2)}}.$$

一般の $p_n(x)$ は帰納的に次のようにして構成される.

すでに $p_m(x)$ $(0 \leq m \leq n-1)$ が構成されたものとする. $p_n(x)$ は $p_k(x)$ $(0 \leq m \leq n-1)$ および $x^n$ の 1 次結合で表される:

$$p_n(x) = k_n x^n + \sum_{m=0}^{n-1} k_{nm}p_m(x) \quad (k_n > 0).$$

直交関係 $(p_n, p_m) = 0$ $(m \leq n-1)$ および等式 $(p_m, p_m) = 1$ より

$$k_n(x^n, p_m) + k_{nm} = 0 \Longrightarrow k_{nm} = -k_n(x^n, p_m)$$

すなわち

$$p_n(x) = k_n\left(x^n - \sum_{m=0}^{n-1}(x^n, p_m)p_m(x)\right).$$

$(p_n, p_n) = 1$ より

$$k_n^2\left\{(x^n, x^n) - \sum_{m=0}^{n-1}(x^n, p_m)^2\right\} = 1.$$

さて $x^n - \sum_{m=0}^{n-1}(x^n, p_m)p_m(x)$ は恒等的には 0 ではないゆえ,

$$(x^n, x^n) - \sum_{m=0}^{n-1}(x^n, p_m)^2 \neq 0$$

これより

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{(x^n, x^n) - \sum_{m=0}^{n-1}(x^n, p_m)^2}}$$

これで $k_n, k_{nm}$ がすべて求まったので $p_n(x)$ が一意的に決まる. この方法は Gram-Schmidt の直交化という.

以上まとめて,

**定理 6.1** 上の (i), (ii) を満たす直交多項式系はただひとつ存在する. それらは Gram-Schmidt の直交化によって構成することができる.

**命題 6.2** $p_n(x)$ を行列式を用いて次のように表示できる:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{6.1}$$

特に

$$k_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}. \tag{6.2}$$

$D_{-1} = 1$ と約束すれば等式 (6.1), (6.2) は $n = 0$ でも成り立つ.

**例 6.1** 第 1 種 Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ を正規化すると (2.8), (2.9) より

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n(x)\ (n \geq 1).$$

ゆえに

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad k_n = 2^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

また，等式 (6.2) より

$$D_n = k_0^{-2}k_1^{-2}\cdots k_n^{-2} = \pi^{n+1}2^{-n^2}.$$

また $U_n(x)$ を正規化すると

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_n(x) \quad (n \geq 0).$$

ゆえに

$$k_n = 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

等式 (6.2) より

$$D_n = \pi^{n+1}2^{-(n+1)^2}.$$

**問 6.1**　次のことを示せ.

Legendre 多項式 $P_n(x)$ は

$$P_n(x) = l_n x^n + \cdots \quad \left(l_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\right)$$

と表される．その正規化は

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x).$$

ゆえに

$$k_n = l_n\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \qquad D_n = \frac{2^{(n+1)^2}}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{2k}{k}^2}$$

が得られる.

**問 6.2** Hermite 多項式 $H_n(x)$ を正規化して $k_n$ を求めよ．対応する重み関数の $D_n$ を求めよ.

一般に $D_n$，$p_n(x)$ は Selberg 型積分表示をもつ (付録 A4 参照):

**定理 6.3**

$$D_n = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{0\le i<j\le n}(t_i - t_j)^2 d\rho(t_0)d\rho(t_1)\cdots d\rho(t_n), \tag{6.3}$$

$$p_n(x) = $$

$$\frac{1}{n!\sqrt{D_{n-1}D_n}}\int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{i=1}^{n}(x-t_i)\prod_{1\le i<j\le n}(t_i - t_j)^2 d\rho(t_1)\cdots d\rho(t_n). \tag{6.4}$$

**証明.** 任意の $N$-分割

$$\Delta:\ a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_N \le b$$

に対して $d\rho(x) = d\rho_\Delta(x)$,

$$d\rho_\Delta(x) = \sum_{\nu=1}^{N}\kappa_\nu \delta(x - x_\nu)dx$$

の場合を考える．ここで $\kappa_\nu > 0\ (1 \le \nu \le N)$, $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数とする．$u_{i,\nu} = x_\nu^i\ (0 \le i \le n,\ 1 \le \nu \le N)$ を $i,\nu$ 成分とする $(n+1)\times N$ 行列を $U$ で表す．

$$c_{i+j} = \sum_{\nu=1}^{N}\kappa_\nu x_\nu^{i+j}$$

であるから定義 5.2 より行列式についての Laplace の展開を用いて

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{1\le\nu_0<\nu_1<\cdots<\nu_n\le N}\left(\prod_{r=0}^{n}\kappa_{\nu_r}\right)U^2\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le\nu_0<\nu_1<\cdots<\nu_n\le N}\left(\prod_{r=0}^{n}\kappa_{\nu_r}\right)\prod_{0\le i\le j\le n}(x_{\nu_i} - x_{\nu_j})^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\nu_0=1}^{N}\cdots\sum_{\nu_n=1}^{N}\left(\prod_{r=0}^{n}\kappa_{\nu_r}\right)\prod_{0\le i\le j\le n}(x_{\nu_i} - x_{\nu_j})^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b\cdots\int_a^b\prod_{0\le i<j\le n}(t_i - t_j)^2 d\rho_\Delta(t_0)d\rho_\Delta(t_1)\cdots d\rho_\Delta(t_n)
\end{aligned}$$

となって (6.3) が示された．ただし $U\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}$ は $(i+1, j+1)$ 成分が $u_{i,\nu_j}$ である $(n+1)\times(n+1)$ の行列式を表す．$[a,b]$ 上の任意の Stieltjes

測度 $d\rho(x)$ は $d\rho_\Delta$ によって近似される．(6.3) の両辺ともに $d\rho_\Delta$ の場合の極限と見なされるので一般の場合も (6.3) が成立する．等式 (6.4) も同様な方法で証明できる． □

**問 6.3**　等式 (6.1) を利用して (6.4) を証明せよ．

**注意 6.1**　もっと一般に $\lambda$ を任意の正数とするとき，$n$ 重積分

$$
\begin{aligned}
&S_n(x;\ \lambda)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{i=1}^{n}(x-t_i) \prod_{1\le i<j\le n} |t_i - t_j|^{\lambda} d\rho(t_1)\cdots d\rho(t_n),\\
&S_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_m;\ \lambda)\\
&= \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(x_j-t_i)\cdot \prod_{1\le i<j\le n} |t_i - t_j|^{\lambda} d\rho(t_1)\cdots d\rho(t_n)
\end{aligned}
$$

が考えられる．これらはランダム行列や共形場理論において相関関数として現れる基本的な量である (文献 [Fo], [Me] 参照).

第 7 章

# 直交多項式の基本的な性質

第 7 章では直交多項式の基本的な属性である 3 項漸化式，Christoffel-Darboux の公式，零点の分離，Christoffel 数，Gauss の機械的求積法およびその応用について説明する．

## 7.1 3 項漸化式

**定理 7.1** $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ は内積 $(f, g)$ に関して正規直交多項式系とする．すなわち

$$(p_n, p_m) = \delta_{n,m}$$

$$p_n(x) = k_n x^n + \cdots \quad (k_n > 0)$$

$(p_0(x) = k_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}})$ とする．このとき 3 項漸化式 (3 term recurrence relation)

$$x p_n(x) = b_{n-1} p_{n-1}(x) + a_n p_n(x) + b_n p_{n+1}(x) \quad (n \geq 1) \tag{7.1}$$

が成り立つ．さらに $p_{-1}(x) = 0$ とおけば

$$x p_0(x) = a_0 p_0(x) + b_0 p_1(x) \tag{7.2}$$

とおくことができるので (7.1) は $n = 0$ でも成り立つといえる．

**系 7.2** $k_n = b_n k_{n+1}$ $(n \geq 0)$, $k_n = k_0 b_0^{-1} b_1^{-1} \cdots b_{n-1}^{-1}$.

(7.1), (7.2) を無限次行列表示することができる:

$$x\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & \\ & b_1 & a_2 & \ddots \\ & & b_2 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

右辺に表れる無限次の行列 (以下 $A$ で表す) を Jacobi 行列あるいは 3 重対角行列 (tridiagonal matrix) という．縦ベクトル

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

とおけば，(7.3) はまた

$$x\vec{p} = A\vec{p} \tag{7.4}$$

と表される．$\mathbf{C}$ に値をもつ $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 上の関数全体からなる無限次元の線形空間を $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}}$ で表すとき，$\vec{p}$ は $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}}$ に属する元とみなすことができる．

**注意 7.1**　(7.4) に現れる行列 $A$ は対称行列である．

$\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を正規とは限らない単に直交多項式系とするとき 3 項漸化式は

$$x\varphi_n(x) = b_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + a_n\varphi_n(x) + b'_n\varphi_{n+1}(x) \quad (n \geq 0), \tag{7.5}$$

$$\varphi_{-1}(x) = 0.$$

の形に表される．(7.5) は

$$x\vec{\varphi} = A\vec{\varphi}, \quad \vec{\varphi} = {}^t(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots) \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}}. \tag{7.6}$$

対応する Jacobi 行列 $A$ は一般には非対称であって

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0' & & & \\ b_0 & a_1 & b_1' & & \\ & b_1 & a_2 & \ddots & \\ & & b_2 & \ddots & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

と表される.

**例 7.1** $T_n(x), U_n(x)$ に関する 3 項漸化式はそれぞれ次のように与えられる:

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}T_{n-1}(x) + \frac{1}{2}T_{n+1}(x) \quad (n \geq 1),$$

$$xT_0(x) = T_1(x),$$

$$xU_n(x) = \frac{1}{2}U_{n-1}(x) + \frac{1}{2}U_{n+1}(x) \quad (n \geq 0).$$

ただし $T_{-1}(x) = U_{-1}(x) = 0$ とおく.

**例 7.2** Legendre 多項式 $P_n(x)$, Hermite 多項式 $H_n(x)$ に関する 3 項漸化式はそれぞれ次のように与えられる:

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \quad (n \geq 1), \tag{7.8}$$

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (n \geq 1). \tag{7.9}$$

ただし $P_{-1}(x) = H_{-1}(x) = 0$ とおく.

**問 7.1** 等式 (7.8), (7.9) を証明せよ.

## 7.2 直交多項式の基本性質

### 1. Christoffel-Darboux の等式.

$n-1$ 次多項式 $q_n(x)$ を次で定義する:

$$q_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x) - p_n(t)}{x - t} d\rho(t) \tag{7.10}$$

$$= c_0 k_n x^{n-1} + \cdots \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{7.11}$$

明らかに $q_0(x) = 0$, $q_1(x) = c_0 k_1$ である.

**命題 7.3**　$p_n(x)$ を $q_n(x)$ に置き換えることにより $q_n(x)$ もまた 3 項漸化式 (7.1) を満たす.

**問 7.2**　命題 7.3 を証明せよ.

**問 7.3**　命題 7.3 を用いて等式

$$b_{n-1}\{p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x)\} = 1 \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことを示せ.

**命題 7.4**　次の Christoffel-Darboux の等式が成り立つ:

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)p_\nu(y) = b_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}, \tag{7.12}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)^2 = b_n\{p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\}. \tag{7.13}$$

ただし, $p'_n(x) = \dfrac{dp_n(x)}{dx}$.

**問 7.4**　(7.1) を利用して (7.12), (7.13) を導け.
(ヒント: これは変数 $n$ の関数とみるとき Gauss-Green の公式の離散版である (補題 13.10 参照)).

**定義 7.5**　$x, y \in \mathbf{C}$ に対して

$$K_n(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\overline{p_\nu(y)}$$

を Szegö 核という. $K_n(x, x) \geq 0$. $x, y \in \mathbf{R}$ ならば

$$K_n(x, y) = K_n(y, x) = \overline{K_n(x, y)}.$$

さらに等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, z)\, K_n(z, y) d\rho(z) = K_n(x, y)$$

が成り立つ. この関係式を満たす $x, y$ の関数は再生核 (reproducing kernel) とよばれる.

**命題 7.6** $p_n(x)$ の零点はすべて実かつ単根で，それらを増大列 $x_{n,1},\cdots,x_{n,n}$ で表すとき

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n} \tag{7.14}$$

であって有理式 $\dfrac{q_n(x)}{p_n(x)}$ について

$$\frac{q_n(x)}{p_n(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\kappa_\nu}{x - x_{n,\nu}} \tag{7.15}$$

が成り立つ．ここで $\kappa_\nu$ はすべて正数であって Christoffel 数 とよばれる．零点集合 $\{x_{n,\nu}\}_{1\le\nu\le n}$ は $d\rho$ の台 (support) $\mathrm{Supp}(d\rho)$ の凸包 (convex hull) に含まれる．

**証明.** 証明の概略のみ述べる．まず $p_n(x)$ の零点について．$p_n(x)$ の零点 $\zeta$ があれば複素共役 $\overline{\zeta}$ もまた零点である．ゆえに $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{(x-\zeta)(x-\overline{\zeta})}$ は $n-2$ 次実多項式であるから $p_n(x)$ と直交する．しかし

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_n(x)d\rho(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n^2(x)}{|x-\zeta|^2} d\rho(x) > 0 \end{aligned}$$

となって矛盾する．同様に零点 $\zeta \in \mathbf{R}$ が $\mathrm{Supp}(d\rho)$ の凸包の外部の点とすれば $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{x-\zeta}$ は $\mathrm{Supp}(d\rho)$ において $p_n(x)$ と同時に同符号かまたは同時に異符号である．ゆえに

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_n(x)d\rho(x) \neq 0$$

となって矛盾する．また $\zeta$ が $p_n(x)$ の重根とすれば $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{(x-\zeta)^2}$ ととると $f(x)p_n(x) \ge 0$ となるゆえやはり直交性に矛盾する．不等式 (7.14) は等式 (7.13) を適用すればただちに得られる．(7.15) については定理 7.10 の注意 7.2 を見よ． □

**注意 7.2**　$\mathrm{Supp}(d\rho)$ が互いに素な有限個の区間 $[a_j, b_j]\,(1 \leq j \leq r)$, $b_j < a_{j+1}\,(1 \leq j \leq r-1)$ に含まれるならば $\mathrm{Supp}(d\rho)$ の外部にある開区間 $(b_j, a_{j+1})$ に含まれる $p_n(x)$ の零点の個数は高々 1 個のみである (例 15.1 参照).

**問 7.5**　上の注意 7.2 を証明せよ.

さらに次の等式が成り立つ:

**命題 7.7**

$$\kappa_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{p_n(x)}{p_n'(x_{n,\nu})(x - x_{n,\nu})} \right)^2 d\rho(x) \tag{7.16}$$

$$= -\frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{1}{p_{n+1}(x_{n,\nu}) p_n'(x_{n,\nu})} \tag{7.17}$$

$$= \frac{1}{K_n(x_{n,\nu}, x_{n,\nu})}. \tag{7.18}$$

$p_n(x)$ の零点の分離に関して次の Sturm の定理が導かれる (文献 [Ga], [Takag] 参照):

**命題 7.8**　多項式列 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ は Sturm 列をなす. ここで Sturm 列とは次の 3 条件を満たす関数列のことである:

(i)　$p_0(x) = \mathrm{c}$ (定数) $\neq 0$, $\deg p_n(x) = n$,

(ii)　$p_\nu(\xi) = 0\ (n > \nu \geq 1)$ ならば $p_{\nu-1}(\xi) p_{\nu+1}(\xi) < 0$,

(iii)　$p_\nu(\xi) = 0\ (n > \nu \geq 1)$ ならば $p_\nu'(\xi) p_{\nu-1}(\xi) > 0$.

いま $V(x)$ でもって, 列 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ の符号の変化の個数を表すものとする. Sturm の定理により $V(x) = n\ (x \ll 0)$ また $V(x) = 0\ (x \gg 0)$ である. すなわち

$$V(a) - V(b) = n \quad (a \ll 0 \ll b)$$

が成り立つ. これより

**系 7.9**

$$\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{l_\nu}{x - x_{n,\nu}},$$

$$l_\nu = \frac{p_n'(x_{n,\nu}) p_{n-1}(x_{n,\nu}) - p_{n-1}'(x_{n,\nu}) p_n(x_{n,\nu})}{{p_n'}^2(x_{n,\nu})} > 0.$$

**2. Gauss の機械的求積法.**

次の定理は様々な応用をもつ極めて重要な等式である．これを Gauss の機械的求積法 (Gauss mechanical quadrature) という:

**定理 7.10** $f(x)$ を高々 $2n-1$ 次の多項式とするとき，等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\rho(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu f(x_{n,\nu}) \tag{7.19}$$

が成り立つ.

特に等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu = c_0$$

が成り立つ.

**証明.** $f(x) = g(x)p_n(x) + h(x)$ ($\deg g$, $\deg h \leq n-1$) と表しておく．すると (7.19) の左辺は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)d\rho(x)$ に等しく，右辺は $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu h(x_{n,\nu})$ に等しい．ゆえに等式 (7.19) について $\deg f \leq n-1$ のときに証明すればよい．このとき Lagrange の補間公式 (Lagrange's interpolation) (文献 [Ga], [Sz] 参照) により

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{n,\nu})L_\nu(x),$$

$$L_\nu(x) = \prod_{\mu=1,\mu\neq\nu}^{n} \frac{x - x_{n,\mu}}{x_{n,\nu} - x_{n,\mu}}$$

と表される．ゆえに

$$\kappa_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} L_\nu(x)d\rho(x) \tag{7.20}$$

とおけば (7.19) が成り立つ. □

**注意 7.3** 逆に $\kappa_\nu$ を (7.20) によって定義すれば (7.19) が成り立ち，さらに (7.19) より (7.15), (7.16), (7.17), (7.18) が導かれる．たとえば (7.15) については積分 (7.10) に (7.19) を適用して

$$q_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu \frac{p_n(x) - p_n(x_{n,\nu})}{x - x_{n,\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu \frac{p_n(x)}{x - x_{n,\nu}}$$

を得る.

**問 7.6**　等式 (7.19) を用いて (7.16), (7.17), (7.18) を導け. (ヒント: (7.16), (7.17) についてはそれぞれ $f(x) = \dfrac{p_n^2(x)}{(x - x_{n,\nu})^2}$, $\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu(x) p_\mu(x_{n,\nu})$ とおけばよい.)

**例 7.3** (i)　第 1 種 Chebyshev 多項式の場合.

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\theta, \quad q_n(x) = \sqrt{2\pi}\, \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\, (x = \cos\theta) \quad (n \geq 1)$$

より零点および Christoffel 数は

$$x_{n,\nu} = \cos\frac{(2n - 2\nu + 1)\pi}{2n},\ \kappa_\nu = \frac{\pi}{n} \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

(ii)　第 2 種 Chebyshev 多項式の場合.

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad q_n(x) = \sqrt{2\pi}\, \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad (n \geq 1).$$

より

$$x_{n,\nu} = \cos\frac{(n - \nu + 1)\pi}{n+1},$$
$$\kappa_\nu = \frac{\pi}{2(n+1)}\{1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n+1}\} \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

## 7.3　振動行列と直交多項式の零点

M.G.Kreĭn と F.R.Gantmacher によって研究された振動行列 (oscillatory matrix) という概念はそれ自体きわめて興味深い概念であるが直交多項式とも関連が深い. 以下にその片鱗を説明する (文献 [Ga], [GK] 参照).

**定義 7.11**　$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ を $n$ 次実正方行列とする. すべての成分 $a_{i,j} \geq 0$ のとき $A$ は非負値行列 (non-negative matrix) という. すべての成分 $a_{i,j} > 0$ のとき正値行列 (positive matrix) という.

$1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n; 1 \le j_1 < \cdots j_p \le n \ (1 \le p \le n)$ に対して $i_1, \cdots, i_p$ 行および $j_1, \cdots, j_p$ 列の成分からなる小行列式を $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$ で表す.

次は Perron-Frobenius の定理としてよく知られている (文献 [Ga] 参照):

**命題 7.12** 正値行列 $A$ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ は正数であって単純, その固有空間は 1 次元, かつ固有ベクトルを成分がすべて正値にとることができる.

**定義 7.13** $A$ の小行列式すべてが非負であるとき $A$ は全非負値行列 (totally non-negative) であるという. またすべての小行列式が正数であるとき全正値行列 (totally positive) であるという. また $A$ が全非負値行列であって適当な正整数 $r$ があって $A^r$ が全正値であるとき $A$ は振動行列 (oscillatory matrix) であるという.

**定義 7.14** $n$ 次元実ベクトル $v = {}^t(v_1, \cdots, v_n)$ について $V_1^n v$ は隣り合う成分 $v_i, v_{i+1}$ の符号の変化の個数を表すものとする. ただし

(i) $v_1 v_n \neq 0$,

(ii) ある $k \ (1 < k < n)$ に対して $v_k = 0$ ならば $v_{k-1}v_{k+1} < 0$ を満たすものとし, 符号の変化は $v_k = 0$ を除いて数えるものとする.

以上の下に次の命題が成り立つ:

**命題 7.15** $A$ が振動行列ならば $A$ の固有値はすべて正であって相異なる. それらを $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n > 0$ とするとき各 $\lambda_k$ の固有空間は 1 次元である. その固有ベクトルを $u^{(k)} = {}^t(u_{1,k}, \cdots, u_{n,k})$ とする. $n \times n$ 行列 $U = (u_{j,k})_{1 \le j,k \le n}$ について次が成り立つように $u^{(k)}$ を選ぶことができる.

(i) $u^{(k)}$ は定義 7.14 の条件を満たし, $V_1^n u^{(k)} = k - 1$.

(ii) $i_1 < \cdots < i_p \ (1 \le p \le n)$ に対して

$$U\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ 1 & \cdots & p \end{pmatrix} > 0.$$

**補題 7.16**　$A$ が $n$ 次 Jacobi 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b'_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b'_1 & & \\ & b_1 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b'_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

である場合，$A$ が振動行列であるための必要十分条件は $a_k, b_k, b'_k$ すべてが正であって，かつ $A$ の主対角小行列式がすべて正であることである．

**系 7.17**　$A$ が対称なとき，すなわち $b_k = b'_k$ であるとき $A$ が振動行列であるための必要十分条件は $b_k$ がすべて正であって，かつ $A$ が正定値であることである．

次は定義から明らかである:

**補題 7.18**　$A$ を (7.3) の表示をもつ対称な正定値 Jacobi 行列とする．すなわち $b_k = b'_k$ であって

$$(A\vec{u}, \vec{u}) \geq 0, \qquad \vec{u} \in l(\mathbf{I}_{\geq 0}),$$

かつ，$\vec{u} \neq 0$ ならば $(A\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ を満たすと仮定する．$A_n$ は最初の $n$ 行，$n$ 列からなる $A$ の小行列とする．$A$ に付随する $n$ 次正規直交多項式 $p_n(x)$ の $n$ 個の根を $x_1, \cdots, x_n$ $(x_1 < \cdots, x_n)$ とするとき $A_n$ の固有値は $x_1, \cdots, x_n$ であり，その固有ベクトルは $u^{(k)} = {}^t(p_0(x_k), \cdots, p_{n-1}(x_k))$ $(1 \leq k \leq n)$ をとることができる．

補題 7.18 より $U = (p_{j-1}(x_k))_{1 \leq j,k \leq n}$ ととれば命題 7.15 の仮定が満たされる．ゆえに命題 7.15 の結論として次が成り立つ:

**命題 7.19**　$A$ は補題 7.18 と同じ条件を満たすものとする．

(i)　$k$ を固定するとき $V_1^n\{p_{j-1}(x_k)\}_{1 \leq j \leq n} = k - 1$.

(ii)　$0 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n-1$ $(1 \leq r \leq n)$ に対して

$$\begin{vmatrix} p_{i_1}(x_n) & p_{i_1}(x_{n-1}) & \cdots & p_{i_1}(x_{n-r+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i_r}(x_n) & p_{i_r}(x_{n-1}) & \cdots & p_{i_r}(x_{n-r+1}) \end{vmatrix} > 0.$$

**注意 7.4** $A$ が任意の実対称 Jacobi 行列とするとき $n$ を固定して正数 $t$ を十分大きくとれば $A_n + tI$ は正定値 Jacobi 行列である. 補題 7.18 のベクトル $u^{(k)}$ は $A$ でも $A+tI$ でも同一であるから命題 7.19 の結論は $A$ でも成立する.

$n$ 個の $n$ 次元ベクトル $e_k = \sqrt{\kappa_k}\, u^{(k)}$ $(1 \le k \le n)$ は $n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における正規直交基底である. すなわち直交関係式

$$\sum_{l=1}^{n} \kappa_l p_j(x_l) p_k(x_l) = \delta_{j,k} \quad (0 \le j, k \le n-1), \tag{7.21}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} p_l(x_j) p_l(x_k) = \kappa_k^{-1} \delta_{j,k} \quad (1 \le j, k \le n) \tag{7.22}$$

が成り立つ. さらに

$$\sum_{l=1}^{n} \kappa_l x_l p_j(x_l) p_k(x_l) = a_{j,k} \quad (0 \le j, k \le n-1) \tag{7.23}$$

が成り立つ. ここで $a_{j,k}$ は $A$ の $(j,k)$ 成分, すなわち $|j-k| \ge 2$ のとき $a_{j,k} = 0$, $|j-k| = 1$ のとき $a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = b_k$, $j = k$ のとき $a_{k,k} = a_k$ である.

**問 7.7** 等式 (7.21), (7.23) を証明せよ (ヒント: (7.19) を用いよ).

**問 7.8** 等式 (7.22) を証明せよ (ヒント: (7.12), (7.13), (7.18) を用いよ).

**問 7.9** 命題 7.19 (i) は, じつは命題 7.8 と実質的に同じことをいっている. その理由を説明せよ.

## 7.4 パラメータによる零点の変動

機械的求積法の応用として $n$ 次正規直交多項式 $p_n(x)$ の零点の増減を判定する Markov の定理について説明する.

区間 $[a,b]$ において重み関数 $w(x)$ がパラメータ $t$ に依存している場合を考察する: $w(x) = w(x,t)$. $w(x,t)$ は $\Omega = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ において $C^1$ 級と仮

定する．このとき $p_n(x)$ の係数は $[\alpha,\beta]$ において $C^1$ 級である．さらに $p_n(x)$ の零点 $x_{n,\nu}\,(1\le\nu\le n)$ は互いに相異なることから各 $x_{n,\nu}=x_{n,\nu}(t)$ もまた $t$ に関して $C^1$ 級である．

以上の下に次の命題が成り立つ:

**命題 7.20** (Markov の定理)　$\log w(x,t)$ の $t$ に関する偏微分

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\Big/ w(x,t)$$

が $[\alpha,\beta]$ において単調増大 (または単調減少) であると仮定する．このとき $\dfrac{dx_{n,\nu}(t)}{dt}$ は正 (または負) である．すなわち $x_{n,\nu}(t)$ は $t$ に関して単調増大 (または単調減少) である．

**証明.** 等式 (7.20) からわかるように Christoffel 数 $\kappa_\nu$ もまた $t$ に関して $C^1$ 級である．(7.19) の両辺 (今の場合, 積分範囲は $[a,b]$) を $t$ について微分すれば $\left(\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}=w_t(x,t)\right)$ とおいて

$$\int_a^b f(x)w_t(x,t)dx=\sum_{\nu=1}^n\frac{d\kappa_\nu}{dt}f(x_{n,\nu})+\sum_{\nu=1}^n\kappa_\nu f'(x_{n,\nu})\frac{dx_{n,\nu}(t)}{dt} \tag{7.24}$$

(この等式は $f(x)$ の係数が $t$ に依存していても成立する.) ここで $\mu\,(1\le\mu\le n)$ をひとつ固定し $f(x)=\dfrac{p_n^2(x)}{x-x_{n,\mu}}$ ととる．$f(x_{n,\nu})=0$, また $\nu\ne\mu$ ならば $f'(x_{n,\nu})=0$ であるから右辺は

$$\kappa_\mu k_n^2\prod_{\nu=1,\nu\ne\mu}(x_{n,\mu}-x_{n,\nu})^2\frac{dx_{n,\mu}(t)}{dt}$$

に等しい．左辺は $p_n(x)$ が直交多項式であることに注意すれば

$$\int_a^b f(x)w_t(x,t)dx=\int_a^b f(x)\left[\frac{w_t(x,t)}{w(x,t)}-\frac{w_t(x_{n,\mu},t)}{w(x_{n,\mu},t)}\right]w(x,t)dx \tag{7.25}$$

と表される．被積分関数 $\dfrac{w_t(x,t)}{w(x,t)}-\dfrac{w_t(x_{n,\mu},t)}{w(x_{n,\mu},t)}$ は仮定から $x=x_{n,\mu}$ を除いて正または 0 である．ゆえに (7.22) は正または 0 である．こうして $\dfrac{dx_{n,\mu}(t)}{dt}\ge 0$ が結論される．□

# 第 8 章

# Jacobi 多項式

この章および次章では直交多項式の典型的な実例について説明する．この 2 章の内容は概ね [Sz]，[In] などによっている．

## 8.1 Jacobi 多項式とは

はじめにガンマ関数とベータ関数についての基本的なことを述べておく．

**定義 8.1** $$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\Re(z) > 0)$$

およびその $\mathbf{C}$ への解析的延長はガンマ (Gamma) 関数とよばれ次の関数等式を満たす:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$
$$\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(z + \frac{(k-1)}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(nz).$$

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$，一般に正整数 $n$ に対して

$$\Gamma(n+1) = n!$$

また

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0)$$

はベータ (Beta) 関数とよばれ，次の表示を持つ:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{8.1}$$

**問 8.1**　計算によって $B(1/2, 1/2) = \pi$ を示せ．(8.1) を用いて $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となることを示せ．またこれを用いて，$n$ を非負整数とするとき

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{8.2}$$

となることを示せ．ただし

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n) = \prod_{k=1}^{n} (2k)$$

を表す．

**定義 8.2**　$\alpha, \beta > -1$ として Rodrigues 型の表式

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{8.3}$$

によって定義される $n$ 次多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ を Jacobi 多項式という．

**命題 8.3**　等式

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \delta_{n,m} h_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{8.4}$$

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{8.5}$$

が成り立つ．すなわち $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で定義されている密度 $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx$に関する直交多項式である．正規直交多項式は $p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{(\alpha,\beta)}}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ で与えられる．

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = l_n^{(\alpha,\beta)} x^n + (\text{低次})$$

と表すとき

$$l_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}. \tag{8.6}$$

ちなみに

$$\begin{aligned}
P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1,\\
P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}\{(2+\alpha+\beta)x+\alpha-\beta\},\\
P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8}\{(4+\alpha+\beta)(3+\alpha+\beta)x^2+2(\alpha-\beta)(3+\alpha+\beta)x\\
&\qquad +(\alpha-\beta)^2-\alpha-\beta-4\}.
\end{aligned}$$

次の恒等式が成り立つ:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x).$$

**問 8.2** 部分積分およびベータ関数の公式 (8.1) を用いて等式 (8.4), (8.5) を示せ.

**問 8.3** (8.6) を示せ.

**問 8.4** $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}$ を示せ.

## 8.2 3 項漸化式

**命題 8.4** 次の 3 項漸化式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&= (2n+\alpha+\beta-1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&\quad -2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (n\geq 1) \qquad (8.7)
\end{aligned}$$

(ただし $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0$ とおく)

**問 8.5** 等式 (8.7) を示せ.

**問 8.6** 正規直交多項式 $p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^{(\alpha,\beta)}}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ に対して 3 項漸化式 ((7.1) 参照) を明示的に求めよ.

さらに

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

となることを示せ.

## 8.3　Jacobi 多項式の満たす微分方程式

$y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は Fuchs 型の 2 階線形微分方程式を満たす．すなわち微分作用素:

$$\begin{aligned} L_x y &= (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}\right]y \\ &= (1-x^2)y'' + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}y' \end{aligned}$$

に対して

$$L_x y + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \tag{8.8}$$

を満たす．ここで $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は超幾何関数 $F(a,b,c;t)$ を用いて次のように表すことができる (文献 [In], [WW] 参照):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{8.9}$$

ここで

$$F(a,b,c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,t^n \quad (|t|<1; c \neq 0,-1,-2,\cdots).$$

$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer の記号を表す．$u(x) = F(a,b,c;t)$ は $u(0)=1$ を満たし，原点の近傍で次の微分方程式を満たす正則な解として一意的に定義される:

$$t(1-t)u'' + \{c-(a+b+1)t\}u' - abu = 0.$$

**注意 8.1**　(8.9) は $a=-n$ ($n$ は非負整数) のとき $n$ 次多項式である.

**問 8.7**　等式 (8.9) を証明せよ.

## 8.4　積分表示

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(-1 < x < 1)$ は次の積分表示をもつ:

$$\begin{aligned} &2^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\sigma_x}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(t-x)^{-n-1}dt. \end{aligned} \tag{8.10}$$

ここで $\sigma_x$ は $x$ を左回りに一周する小輪体 (loop) を表す．$(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}$ の分岐は $-1 < t < 1$ で正となるようにとる．

別の関数 $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ を Cauchy 核を用いた次の積分で定義する:

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}dt \\ &= \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(x-t)^{-n-1}dt \end{aligned} \tag{8.11}$$

$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は領域 $\mathbf{C}-(-\infty,1]$ で一価正則である．ただし，$(x-1)^\alpha(x+1)^\beta$ は $x>1$ で正数であるように分岐をとる．特に

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_x^\infty(t-1)^{-\alpha-1}(t+1)^{-\beta-1}dt \qquad (\alpha+\beta+1>0) \tag{8.12}$$

が成り立つ．

(8.10), (8.11) のような多価な解析関数の積分 (ツイスト積分) に現れる積分路はツイスト・サイクルとよばれる．これらの積分はツイスト de Rham コホモロジーとして定式化できる．本書では以下この方針に従って議論を進める (文献 [AK] 参照)．

**問 8.8**　等式 (8.12) を導け．

以下 $x \in \mathbf{C}-(-\infty,1]$ に対して

$$P_n^{*(\alpha,\beta)}(x) = (x-1)^\alpha(x+1)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$Q_n^{*(\alpha,\beta)}(x) = (x-1)^\alpha(x+1)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

とおく.

**補題 8.5**　$|x| \gg 0, -\pi < \arg x < \pi$ に対して漸近展開

$$Q_n^{*(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n Q_0^{*(\alpha,\beta)}(x)$$
$$\approx x^{-n-1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}2^{2n+\alpha+\beta+1} \tag{8.13}$$

が成り立つ.

**問 8.9**　補題 8.5 を証明せよ.

**補題 8.6**　微分作用素

$$L_x^* y = (1-x^2)y'' + \{\alpha - \beta + (\alpha+\beta-2)x\}y' + (\alpha+\beta)y$$

に対して $y = P_n^{*(\alpha,\beta)}(x)$ および $Q_n^{*(\alpha,\beta)}(x)$ は次の微分方程式を満たす:

$$L_x^* y + (n+1)(n+\alpha+\beta)y = 0. \tag{8.14}$$

**問 8.10**　積分表示 (8.10), (8.11) を用いて補題 8.6 を証明せよ. (ヒント: 積分域 $\sigma$ が $\sigma_x$ または $[-1,1]$ とする. $\psi(t) = \dfrac{1-t^2}{x-t}$ に対して (8.14) の左辺の積分表示が

$$\int_\sigma d\left[(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(x-t)^{-n-1}\psi(t)\right] = 0$$

に等しいことを示せ.)

**注意 8.2**　補題 8.6 は次の性質を利用しても証明できる. まず

$$L_x^*\left(\frac{1}{x-y}\right) = L_y\left(\frac{1}{x-y}\right) \tag{8.15}$$

を示す. また $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ に付随する内積 $(f,g)_\rho$ に対して

$$(L_x f(x), g(x))_\rho = (f(x), L_x g(x))_\rho \tag{8.16}$$

が成り立つ.

**問 8.11**　(8.15), (8.16) を証明せよ.

**問 8.12** (8.15), (8.16) を用いて補題 8.6 を示せ.

補題 8.6 より,

**命題 8.7** $P_n^{(\alpha,\beta)}(x), Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は微分方程式 (8.8) の 1 次独立な解を与える. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は原点で正則な解, 他方 $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は $x=\infty$ で漸近展開 (8.13) をもつ解として一意に決まる.

$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は方程式 (8.8) の第 2 解 (the second solution) とよぶ.
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ と $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ を結ぶもうひとつの重要な関係式がある:

**命題 8.8** $-1<x<1$ に対して等式

$$-\pi i P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = e^{\pi i\alpha} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x+i0) - e^{-\pi i\alpha} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x-i0) \tag{8.17}$$

が成り立つ.

命題 8.8 は等式 (13.16) の特別な場合である (文献 [Sz] 第 4 章 §6 参照).

**問 8.13** (8.10), (8.11) を利用して命題 8.8 を証明せよ.

## 8.5 隣接関係式

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は様々な隣接関係式 (adjacency relation) を満たす. 3 項関係式 (8.7) はその一例である. この節ではそれ以外の一部を説明する.

$u_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は次の微分差分方程式を満たす:

$$(1-x^2)\frac{du_n}{dx} + n\left(x + \frac{\beta-\alpha}{2n+\alpha+\beta}\right)u_n = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}u_{n-1}, \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned} &-(1-x^2)\frac{du_n}{dx} + (n+\alpha+\beta+1)\{x + \frac{\alpha-\beta}{2n+\alpha+\beta+2}\}u_n \\ &= 2(n+1)\frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}u_{n+1}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

**問 8.14** 問 8.10 のヒントにならって等式 (8.18), (8.19) を導け.

また $v_n(x) = u_n(x)/l_n^{(\alpha,\beta)}$(単多項式) とおくとき, Christoffel-Darboux の関係式

$$v_n(x) = T_\alpha v_n(x) + C_n T_\alpha v_{n-1}(x), \tag{8.20}$$
$$C_n = -\frac{2n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$$

が成り立つ．ここで $T_\alpha$ はずらしの作用素 $\alpha \longrightarrow \alpha+1$ を表す．同様に

$$v_n(x) = T_\beta v_n(x) + C'_n T_\beta v_{n-1}(x), \tag{8.21}$$
$$C'_n = \frac{2n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

**問 8.15**　問 8.10 のヒントにならって等式 (8.20), (8.21) を導け．

**注意 8.3**　等式 (8.20), (8.21) は可積分系の一表示形式である *LR*-アルゴリズムの特別な場合にあたる (文献 [Na] 参照)．また Christoffel の関係式

$$\tilde{C}_n(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(1),$$
$$\tilde{C}'_n(1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(-1) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)$$

と同値な関係式でもある．ただし $\tilde{C}_n$，$\tilde{C}'_n$ は $n$ に依存するゼロではない定数である (文献 [Sz]，定理 2.5 参照)．

## 8.6　多項式の零点

命題 7.20 よりただちに次の命題が導かれる:

**命題 8.9**　$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ の零点 $x_{n,\nu}$ は $\alpha, \beta$ に関して

$$\frac{\partial x_{n,\nu}}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial x_{n,\nu}}{\partial \beta} > 0$$

が成り立つ．

**問 8.16**　命題 8.9 を証明せよ．

**問 8.17**　$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ の零点について $\alpha \to \infty, \beta \to \infty$ のときそれぞれ

$$\lim_{\alpha\to\infty} x_{n,\nu} = -1, \ \lim_{\beta\to\infty} x_{n,\nu} = 1$$

が成り立つことを示せ．

**問 8.18** $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ および $P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)$ の零点をそれぞれ $x_{n,\nu}$, $\tilde{x}_{n,\nu}$ とするとき

$$x_{n-1,\nu-1} < \tilde{x}_{n,\nu} < x_{n,\nu}$$

の関係がある．同じく $P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)$ の零点を $\tilde{x}'_{n,\nu}$ とするとき

$$\tilde{x}'_{n-1,\nu-1} < x_{n,\nu} < \tilde{x}'_{n,\nu}$$

の関係がある．関係式 (8.20), (8.21) を用いてそれを確かめよ．

第 9 章

# Jacobi 多項式の仲間

## 9.1 Jacobi 多項式の特殊な場合

$\alpha, \beta = -\frac{1}{2}$, すなわち, $d\rho(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ のとき $P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$ は定数倍を除いて第 1 種 Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ に等しい.

$\alpha, \beta = \frac{1}{2}$, すなわち, $d\rho(x) = \sqrt{1-x^2}dx$ のとき $P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$ は, 第 2 種 Chebyshev 多項式 $U_n(x)$ である.

$\alpha = \beta = 0$, すなわち, $d\rho(x) = dx$ のとき $P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$ は, Legendre 多項式である.

$\alpha = \beta$, すなわち, $d\rho(x) = (1-x^2)^\alpha dx$ のとき $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = P_n^{(\alpha)}(x)$ は, Gegenbauer の多項式または超球 (ultra spherical) 多項式とよばれる.

(8.8) 式からわかるように超球多項式 $y = P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ は定数倍を除いて次の微分方程式を満たす多項式解として特徴づけられる:

$$(1-x^2)y'' - 2(\alpha+1)y' + n(n+2\alpha+1)y = 0. \tag{9.1}$$

等式

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\alpha)}(-x)$$

が成り立つ. それゆえ $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ は $n$ が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数である.

**命題 9.1** 超球多項式について次の恒等式が成り立つ:

$\alpha > -1$ のとき

$$P_{2m}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2m+\alpha+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(2m+1)} P_m^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(2x^2-1), \tag{9.2}$$

$$P_{2m+1}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2m+\alpha+2)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(2m+2)} x P_m^{(\alpha,\frac{1}{2})}(2x^2-1). \tag{9.3}$$

**証明.** 実際 (9.2) について $Y = P_m^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(X)$ は微分方程式

$$(1-X^2)\frac{d^2Y}{dX^2} - \left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\right\}\frac{dY}{dX} + m\left(m+\alpha+\frac{1}{2}\right)Y = 0$$

を満たす．変数変換 $X = 2x^2-1$ によりこれを変数 $x$ に関する微分方程式に書き直せば (9.1) を得る．多項式解の一意性により最高次の係数を比較すればよい ((8.6) 参照)．(9.3) についても同様である． □

また $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ の零点に関しては命題 8.9 にならって次が成り立つ:

**命題 9.2**

$$\frac{\partial x_{n,\nu}}{\partial \alpha} > 0 \quad \left(1 \le \nu \le \left[\frac{n}{2}\right]\right),$$
$$\frac{\partial x_{n,\nu}}{\partial \alpha} < 0 \quad \left(\left[\frac{n+3}{2}\right] \le \nu \le n\right).$$

ここで，$[a]\,(a \in \mathbf{R})$ は $a$ を越えない最大整数を表す．なお，$n$ が奇数ならば $x_{n,\frac{n+1}{2}} = 0$.

**問 9.1** $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ の零点に関して

$$\lim_{\alpha\to\infty} x_{n,\nu} = 0$$

となることを示せ．

**問 9.2** $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, $P_m^{(\alpha+1,\alpha+1)}(x)$ の間には

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \xi_n P_n^{(\alpha+1,\alpha+1)}(x) + \eta_{n-2} P_{n-2}^{(\alpha+1,\alpha+1)}(x) \quad (n \ge 0)$$

の関係があることを示し，$\xi_n, \eta_{n-2}$ を求めよ．ただし $\eta_{-1} = \eta_{-2} = 0$. 特に $\alpha = -\frac{1}{2}$ の場合，この等式は 3 角関数の加法公式

$$2\sin\theta\,\cos n\theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta$$

に帰着する．

## 9.2　Laguerre 多項式

$\alpha > -1$ とする．区間 $[0, \infty)$ で Stieltjes 関数 $d\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}dx$ に関する直交多項式は Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ である:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha})$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}.$$

また Cauchy の積分公式により

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\sigma_x}\frac{e^{-t}t^{\alpha+n}}{(t-x)^{n+1}}dt \quad (x \notin (-\infty, 0]).$$

$y_n = L_n^{(\alpha)}(x)$ は微分方程式

$$xy_n'' + (\alpha+1-x)y_n' + ny_n = 0 \tag{9.4}$$

および 3 項漸化式

$$xy_{n-1} = -ny_n + (2n+\alpha-1)y_{n-1} - (n+\alpha-1)y_{n-2} \tag{9.5}$$

を満たす．正規直交系は

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}}L_n^{(\alpha)}(x).$$

$x \notin [0, \infty)$ に対して

$$\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) = e^x(-x)^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha}\ L_n^{(\alpha)}(t)}{x-t}dt$$

と定義すれば，小正数 $\delta$ に対して漸近展開

$$\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n e^x(-x)^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,t^{n+\alpha}}{(x-t)^{n+1}}dt$$
$$\approx -e^x(-x)^{-\alpha-n-1}\Gamma(\alpha+n+1)$$
$$(|x| \gg 0,\ \delta < \arg x < 2\pi - \delta)$$

が成り立つ．$L_n^{(\alpha)}(x), \tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)$ はそれぞれ方程式 (9.4) および (9.5) の 2 個の 1

次独立な解を与える．特に

$$\tilde{L}_0^{(\alpha)}(x) = -\int_{-\infty}^{x} e^t(-t)^{-\alpha-1}dt.$$

## 9.3 Hermite 多項式

区間 $(-\infty, \infty)$ で Stieltjes 関数 $d\rho(x) = e^{-x^2}dx$ に関する直交多項式である Hermite 多項式 $H_n(x)$ (2.3 節参照) は次のように表される:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

積分表示式は

$$H_n(x) = (-1)^n n! e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma_x} \frac{e^{-t^2}}{(t-x)^{n+1}} dt.$$

微分方程式および 3 項漸化式は

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \tag{9.6}$$

$$2xH_{n-1}(x) = H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x). \tag{9.7}$$

正規直交系は

$$p_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}\sqrt{n!}} H_n(x).$$

$\Im x \neq 0$ に対して

$$\tilde{H}_n(x) = n! e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} H_n(t)}{x-t} dt$$

と定義すれば漸近展開

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n(x) &= n! e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{(x-t)^{n+1}} dt \\ &\approx n! \sqrt{\pi} e^{x^2} x^{-n-1} \quad (|x| \gg 0, \delta < |\arg x| < \pi - \delta).\end{aligned}$$

が成り立つ．$H_n(x), \tilde{H}_n(x)$ はそれぞれ方程式 (9.6), (9.7) を満たす 2 個の 1 次独立な解を与える．特に

$$\tilde{H}_0(x) = 2\sqrt{\pi}\int_{\pm i\infty}^{x} e^{t^2}dt \quad (\pm\Im x > 0)$$

が成り立つ.

**問 9.3** Laguerre および Hermite 多項式は Jacobi 多項式を合流して得られる. どのような合流か具体的に示せ (合流については文献 [In], [WW] を参照).

## 9.4 Poisson-Charlier 多項式 (離散的測度) の場合

$a > 0$ として $j(x) = \dfrac{e^{-a}a^x}{\Gamma(x+1)}$ とおく. Stieltjes 測度 $d\rho(x)$

$$d\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j(n)\delta(x-n)dx$$

は確率変数 $x$ の Poisson 分布を定義する. ここで $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数を表す.

$d\rho(x)$ に関する直交多項式 $P_n(x)$ は Poisson-Charlier 多項式という. $P_n(x)$ は前進差分 $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$ を用いて

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{\Delta^n j(x-n)}{j(x)} \quad (n \geq 0)$$

と表され, また $P_n(x)$ は Laguerre 多項式を用いて

$$P_n(x) = n!a^{-n}L_n^{(x-n)}(a)$$

とも表される. 正規直交多項式は

$$p_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}a^{n/2}\frac{\Delta^n j(x-n)}{j(x)} = a^{-n/2}\sqrt{n!}\,L_n^{(x-n)}(a).$$

$y_n(x) = P_n(x)$ は各 $n$ について $x$ に関する差分方程式

$$ay_n(x+1) - (a+x-n)y_n(x) + xy_n(x-1) = 0 \quad (x \in \mathbf{C}) \tag{9.8}$$

を満たす. また $x$ を固定すれば 3 項漸化式

$$ay_{n+1}(x) - (x-n-a)y_n(x) + ny_{n-1}(x) = 0 \quad (n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0) \tag{9.9}$$

を満たす．また

$$
\begin{aligned}
Q_n^*(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x-\nu} j(\nu) P_n(\nu) \\
&= (-1)^{n+1} n! e^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-x+\nu)a^\nu}{\Gamma(-x+n+\nu+1)\nu!}, \\
Q_n(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{e^{-a}a^x} Q_n^*(x)
\end{aligned}
$$

と定義すれば $y_n(x) = Q_n(x)\,(n \geq 0)$ は (9.8), (9.9) を満たし，それぞれ (9.8), (9.9) の第 2 解を与えている．

**注意 9.1** $\beta \neq 0, -1, -2, \cdots$ に対して (Kummer の) 合流型超幾何関数

$$
{}_1F_1(\alpha, \beta | z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n n!} z^n \quad (z \in \mathbf{C})
$$

が定義される．これを用いれば $Q_n^*(x)$ は

$$
Q_n^*(x) = (-1)^{n+1} n! e^{-a} \, {}_1F_1(-x, -x+n+1 | a)
$$

と表すことができる (文献 [In], [WW] 参照).

# 第 10 章

# 古典的直交多項式と静電場の平衡

古典的直交多項式の零点は 2 次元平面上での静電場の平衡性と関係が深い. この考察によって直交多項式の零点がすべて実数であることが逆に証明できる. 第 10 章ではこのような考察をして古典的な直交多項式の満たす微分方程式を導出した T. J. Stieltjes の結果について述べる.

## 10.1 実超平面配置と停留点

まず実超平面配置に関する一般的な定理を述べる (文献 [AK], [AF], [OT] 参照).

$\mathbf{C}^n$ の点を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表す. $\mathbf{C}^n$ において有限個の超平面

$$H: \ f_H(x) = 0$$

の族 $\mathcal{A}$ が与えられていて, $H$ ごとに正数 $\lambda_H$ が付与されているものとする. ただし $f_H(x)$ は実係数の 1 次式を表す. $\mathbf{C}^n$ 内での超平面合併の補空間

$$M = \mathbf{C}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

上の実関数

$$F_0(x) = \sum_{H \in \mathcal{A}} \lambda_H \log |f_H(x)|$$

に関して次の定理が成り立つ:

**定理 10.1** $F_0(x)$ の停留点 (stationary point) すなわち

$$\frac{\partial F_0(x)}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

を満たす $M$ の点はすべて実点 (real point) であって $\mathcal{A}$ に付随する有界な部屋すなわち $\mathbf{R}^n \cap M$ の相対的にコンパクトな連結成分にただひとつだけ存在する．それらはすべて各部屋において $F_0(x)$ の極大点である．その個数は $M$ の Euler 標数の絶対値に等しい．

次に $f_0(x)$ を実係数の斉次 1 次式とし $M$ 上の実関数

$$F_1(x) = \Re f_0(x) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \lambda_H \log |f_H(x)|$$

をとる．このとき

**定理 10.2** $F_1(x)$ の停留点すなわち

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

を満たす $M$ の点はすべて実点であって $\mathcal{A}$ に付随する有界な部屋または非有界ではあるが $f_0(x)$ が有界であるような部屋にただひとつだけ存在する．それらはすべて各部屋において $F_1(x)$ の極大点である．

さらに $F_2(x)$ を

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\Re\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \sum_{H \in \mathcal{A}} \lambda_H \log |f_H(x)|$$

とおく．このとき

**定理 10.3** $F_2(x)$ の停留点すなわち

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

を満たす $M$ の点はすべて実点であって $\mathcal{A}$ に付随するすべての部屋にただひとつだけ存在する．それらはすべて各部屋において $F_2(x)$ の極大点である．

## 10.2 古典的直交多項式と静電場の平衡

上の 3 定理を特別な超平面配置の場合に適用する．

(i)　Jacobi 多項式の場合.

$\alpha^*, \beta^* > 0$ を固定する. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \log\left(\prod_{k=1}^{n} |1 - x_k|^{\alpha^*} |1 + x_k|^{\beta^*} \prod_{1 \le j < k \le n} |x_j - x_k|\right) \end{aligned}$$

とおく. 超平面の集合

$$S = \bigcup_{1 \le j < k \le n} \{x_j = x_k\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} \{x_k = \pm 1\}$$

に対し $F(x)$ は $x \in \mathbf{R}^n - S$ において定義される.

**命題 10.4**　$F(x)$ は $\mathbf{R}^n - S$ において $n!$ 個の停留点をもち, それらはすべて $F(x)$ の極大値である. 停留点はすべて $|x_k| < 1$ $(1 \le k \le n)$ を満たす. さらにそれらは座標の置換によって互いに移り得る. 言い換えれば方程式系

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\alpha^*}{x_k - 1} + \frac{\beta^*}{x_k + 1} + \sum_{1 \le j \le n, j \ne k} \frac{1}{x_k - x_j} = 0 \quad (1 \le k \le n) \tag{10.1}$$

は $n!$ 個の解をもち, それらは置換によって互いに移り得る. 特に領域

$$\Delta_0 :\ -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1 \tag{10.2}$$

にはただひとつの解が存在する.

**注意 10.1**　命題 10.4 は次のような物理的な意味づけができる:
$-F$ は各点 $x = x_k \in \mathbf{R}$ に電荷 1, $x = 1$ に電荷 $\alpha^*$, $x = -1$ に電荷 $\beta^*$ を与えたときにできる複素平面上にできる静電場のエネルギーを与える. 実際の静電場では $x = \pm 1$ を固定した場合, $-F$ が最小となるような平衡状態の配置 (electro-static equilibrium) すなわち方程式 (10.1) も満たすような点電荷配置が実現する.

**補題 10.5**　(10.1), (10.2) を満たす一意的な解 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して $n$ 次多項式 $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ とおくとき等式

$$\sum_{1 \le j \le n;\ j \ne k} \frac{1}{x_k - x_j} = \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1 \le k \le n) \tag{10.3}$$

が成立する.

**問 10.1** 補題 10.5 を証明せよ.

(10.1), (10.3) より

$$\frac{\alpha^*}{x_k - 1} + \frac{\beta^*}{x_k + 1} + \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} = 0 \quad (1 \le k \le n).$$

分母をはらって

$$(x_k^2 - 1) f''(x_k) + 2\{(\alpha^* + \beta^*) x_k + \alpha^* - \beta^*\} f'(x_k) = 0.$$

$$g(x) = (x^2 - 1) f''(x) + 2\{(\alpha^* + \beta^*) x + \alpha^* - \beta^*\} f'(x)$$

とおけば $g(x)$ もまた $n$ 次多項式であって $g(x_k) = 0$. ゆえに $g(x) = Cf(x)$ を満たす定数 $C$ が存在する. $x^n$ の係数を比較して

$$C = n(n - 1 + 2\alpha^* + 2\beta^*).$$

ゆえに $\alpha = 2\alpha^* - 1, \beta = 2\beta^* - 1$ とおくと等式

$$(x^2 - 1) f''(x) + \{(\alpha + \beta + 2) x + \alpha - \beta\} f'(x) - n(n + 1 + \alpha + \beta) f(x) = 0 \tag{10.4}$$

が導かれる. これは Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ が満たす方程式に他ならない. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ はスカラー倍を除いて (10.4) を満たすただひとつの多項式解であるから $f(x)$ は $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ の定数倍である. すなわち

$$l_n^{(\alpha,\beta)} f(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

(ii) Laguerre 多項式の場合.

$\alpha^* > 0$ に対して

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \left( -\frac{1}{2} x_k + \alpha^* \log |x_k| \right) + \log \left( \prod_{1 \le j < k \le n} |x_j - x_k| \right)$$

とおいて $F(x)$ の停留点すなわち方程式

$$-\frac{1}{2}+\frac{\alpha^*}{x_k}+\sum_{1\le j\le n, j\ne k}\frac{1}{x_k-x_j}=0 \quad (1\le k\le n) \tag{10.5}$$

を考察する.

**命題 10.6** (10.5) は $\mathbf{R}^n - S$ において $n!$ 個の解をもち，それらはすべて $F(x)$ の極大値で座標の置換によって互いに移り得る．すなわち

$$\Delta_1:\ 0<x_1<x_2<\cdots<x_n$$

においてただひとつの解をもち，その他の解はこの解の置換によって得られる.

補題 10.5 のように $f(x)$ を定義すれば $\alpha=2\alpha^*-1$ に対して

$$-\frac{1}{2}+\frac{\alpha^*}{x_k}+\frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}=0.$$

ゆえに $g(x)=(2\alpha^*-x)f'(x)+f''(x)$ とおくと $g(x)=-nf(x)$. すなわち $\alpha=2\alpha^*-1$ に対して方程式

$$xf''(x)+(\alpha+1-x)f'(x)+nf(x)=0 \tag{10.6}$$

を満たす．これは Laguerre の方程式に他ならない．Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ は (10.6) を満たし，定数倍を除いてただひとつの多項式解であるから

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}f(x).$$

(iii) Hermite 多項式の場合.

$$F(x)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{1\le j<k\le n}\log|x_j-x_k|$$

とおく.

**命題 10.7** $F(x)$ の停留点すなわち

$$-x_k+\sum_{1\le j\le n, j\ne k}\frac{1}{x_k-x_j}=0 \tag{10.7}$$

の解は $\mathbf{R}^n - S$ において $n!$ 個存在し，それらはすべて $F(x)$ の極大値で座標置

換によって互いに移り得る．領域

$$\Delta_2 : \ x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

にただひとつの停留点をもつ.

同様に $f(x)$ を定義すれば $f(x)$ は Hermite の微分方程式

$$f''(x) - 2xf'(x) + 2nf(x) = 0 \tag{10.8}$$

を満たし，$f(x)$ は定数倍を除いて Hermite 多項式に等しい:

$$H_n(x) = 2^n f(x).$$

## 第 11 章

# Jacobi-Perron アルゴリズムと Padé 近似

第 11 章では Stieltjes 測度 (重み関数) の Stieltjes 変換を定義し，その Padé 近似を求める Jacobi-Perron アルゴリズム，その極限の収束を保証する Markov の定理について説明する.

## 11.1　Sieltjes 変換の Padé 近似

**定義 11.1**　$z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ に対して定義される解析関数

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{z - t}$$

は Stieltjes 測度 $d\rho(t)$ の Stieltjes 変換とよばれる. $\delta$ を十分小の正数として $0 < \delta \le |\arg z| \le \pi - \delta$ かつ $|z| \to \infty$ における漸近挙動 (形式的 (formal) Laurent 展開)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n-1} \tag{11.1}$$

が得られる. ここで $c_n$ は Stieltjes 測度 $d\rho(t)$ のモーメント (moment) である.

**定義 11.2**　モーメント $c_n$ $(n \ge 0)$ は Hankel 行列式がすべてゼロと異なるならば非退化であるという. 非退化なモーメント $c_n$ を係数とする形式 Laurent 級数 (11.1) に対して，$n$ 次多項式 $P_n(z)$ と $n-1$ 次多項式 $Q_n(z)$ (ただし $P_{-1}(z) = Q_0(z) = 0$ とおく) が

$$F(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) \tag{11.2}$$

を満たすとき，有理式 $Q_n(z)/P_n(z)$ は $n$ 次の Padé 近似であるという．

## 11.2 Jacobi-Perron アルゴリズム

(11.1) に対し $U_0=1$ として，まず

$$F(z)=\frac{V_0}{U_0}$$

とおく．次に

$$\begin{aligned}
&V_0=U_1,\\
&\frac{U_0}{V_0}=\alpha_1 z+\alpha_0+\frac{V_1}{U_1},\quad \frac{V_1}{U_1}=O\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}\tag{11.3}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} U_0\\ V_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 z+\alpha_0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1\\ V_1\end{pmatrix}\tag{11.4}$$

を満たすように定数 $\alpha_0,\alpha_1$ を求める．両辺を比較して

$$\alpha_0=\frac{1}{c_0},\quad \alpha_1=-\frac{c_1}{c_0^2}.$$

そして形式的 Laurent 級数として

$$\frac{U_1}{V_1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n' z^{-n-1}\tag{11.5}$$

とおくことができる．

**命題 11.3** $c_n'\,(n=0,1,2,\cdots)$ に関する $n$ 次 Hankel 行列式を $D_n'$ で表すとき次の等式が成り立つ:

$$D_n'=(-1)^{n+1}\frac{D_{n+1}}{c_0^{2n+3}}\tag{11.6}$$

命題 11.3 を証明する前にひとつの補題を準備する．

等式 (11.3) を次のように行列表示する．いま無限下 3 角行列 $X,Y$ を

$$X = \begin{pmatrix} c_0 & & & & & \\ c_1 & c_0 & & & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & & \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & & \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & & & & \\ c_0' & \alpha_0 & \alpha_1 & & & \\ c_1' & c_0' & \alpha_0 & \alpha_1 & & \\ c_2' & c_1' & c_0' & \alpha_0 & \alpha_1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

と定義すれば積 $X \cdot Y$ が定義可能で等式

$$X \cdot Y = I$$

が成り立つ．ここで $I$ は恒等行列である．すなわち $Y$ は $X$ の逆行列である．このとき逆行列の小行列式に関する定理により次の補題がいえる:

**補題 11.4**　$X, Y$ の $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行，$j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列の成分からなる小行列式をそれぞれ

$$X\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_r \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_r \end{pmatrix}, \quad Y\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_r \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_r \end{pmatrix}$$

で表すとき等式

$$\begin{aligned} &Y\begin{pmatrix} n+3, & n+4, & \cdots, & 2n+3 \\ 1, & 2, & \cdots, & n+1 \end{pmatrix} \\ &= c_0^{-2n-3} X\begin{pmatrix} n+2, & n+3, & \cdots, & 2n+3 \\ 1, & 2, & \cdots, & n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明は文献 [Ga], [Takag] を参照．

**命題 11.3 の証明．**

$$X\begin{pmatrix} n+2, & n+3, & \cdots, & 2n+3 \\ 1, & 2, & \cdots, & n+2 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} D_{n+1},$$

$$Y\begin{pmatrix} n+3, & n+4, & \cdots, & 2n+3 \\ 1, & 2, & \cdots, & n+1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} D'_n$$

に注意して等式 (11.6) を得る. □

たとえば $c'_0 = -D_1/c_0^3, D'_1 = D_2/c_0^5$ etc.

したがって (11.5) もまた非退化である. $U_1/V_1$ について上の操作を行うことができる:

$$V_1 = U_2,$$

$$\frac{U_1}{V_1} = \alpha_1^{(1)} z + \alpha_0^{(1)} + \frac{V_2}{U_2}, \quad \frac{V_2}{U_2} = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} z + \alpha_0^{(1)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

を得る. この操作を繰り返せば $n$ ステップ目において関係式

$$V_{n-1} = U_n,$$

$$\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}} = \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)} + \frac{V_n}{U_n}, \quad \frac{V_n}{U_n} = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

を得る. すなわち $\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}, \alpha_0 = \alpha_0^{(0)}$ とおいて

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} z + \alpha_0^{(0)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

かつ

$$U_n = O\left(\frac{1}{z^n}\right),$$

$$V_n = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} P_n(z) & P_{n-1}(z) \\ Q_n(z) & Q_{n-1}(z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} z + \alpha_0^{(0)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

とおけば $u_n = P_n(z), u_n = Q_n(z)$ はそれぞれ $n, n-1$ 次の多項式であって 3 項漸化式

$$u_n = (\alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)}) u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{11.9}$$

を満たす．(11.7) を逆に解くことにより次が成り立つ:

**命題 11.5**　モーメント $(c_n)_{n \geq 0}$ が非退化ならば

$$F(z) P_n(z) - Q_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \tag{11.10}$$

$$P_n(z) Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z) Q_n(z) = (-1)^n. \tag{11.11}$$

すなわち $Q_n(z)/P_n(z)$ は (11.2) を満たし $F(z)$ の Padé 近似である．しかも (11.2) を満たす多項式 $P_n(z), Q_n(z)$ は定数倍を除いて一意である．

**問 11.1**　これらの事実を証明せよ．

$F(z)$, $Q_n(z)/P_n(z)$ は次のような Jacobi 連分数 (Jacobi continued fraction) 表示をもつ (文献 [Hi], [Pe2], [Wa] 参照):

$$F(z) = \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(0)} z + \alpha_0^{(0)}} + \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(1)} z + \alpha_0^{(1)}} + \cdots + \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)}} + \frac{V_n \,|}{|\, U_n}, \tag{11.12}$$

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(0)} z + \alpha_0^{(0)}} + \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(1)} z + \alpha_0^{(1)}} + \cdots + \frac{1 \,|}{|\, \alpha_1^{(n-1)} z + \alpha_0^{(n-1)}}. \tag{11.13}$$

## 11.3 Padé 近似と直交多項式

**命題 11.6** $F(z)$ が (11.1) で表されているとき，$P_n(z), Q_n(z)$ が (11.2) を満たすならば次の事実が成り立つ:

(i) $F(z)P_n(z) - Q_n(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{z-t} d\rho(t)$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)t^m d\rho(t) = 0 \quad (0 \le m \le n-1)$,

(iii) $Q_n(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t} d\rho(t)$.

すなわち $P_n(x)$ は直交多項式である．

逆に $P_n(x)$ が $n$ 次直交多項式ならば，(iii) で定義される $Q_n(x)$ とともに (11.2)，(11.10) が満たされる．

**問 11.2** これらの事実を証明せよ．

(ヒント: 逆に $P_n(x)$ が $d\rho(x)$ に関する $n$ 次直交多項式と仮定するとき，命題 11.6 (i) の等式の右辺は $0\,(1/z^{1+n})$ である．あるいは代数的に次のようにしてもよい．

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{n-k} x^k$ と適当な$n-1$次多項式 $Q_n(x)$ が (11.10) を満たすための必要十分条件は両辺の Laurent 級数を比較して等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_{\nu+k}\gamma_{n-k} = 0 \quad (n-1 \ge \nu \ge 0)$$

が成り立つことである．Hankel 行列が非退化であることよりこのような方程式を満たす $\gamma_{n-k}$ はスカラーを除いて一意的であり $P_n(x)$ は正規直交多項式 $p_n(x)$ のスカラー倍に等しい (命題 6.2 参照).)

命題 11.5 でも述べたように (11.10) を満たす対 $P_n(x), Q_n(x)$ はスカラー倍を除いて一意である．ゆえに正規直交多項式 $p_n(x)$ とその相棒である $q_n(x)$ を用いれば

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{q_n(x)}{p_n(x)}$$

である．(11.9) はまた Jacobi 行列の成分 $a_n, b_n$ を用いて $v_n = p_n(x)$ に関する

3 項漸化式

$$xv_n = b_{n-1}v_{n-1} + a_n v_n + b_n v_{n+1} \tag{11.14}$$

と同値である ((7.1) 参照). 実際次のことがいえる:

**補題 11.7** 2 個の数列 $t_n, b_n\ (n \geq 0)$, $t_0 = 1$ を

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = -\frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_1^{(n+1)}},\ b_n^2 = -\frac{1}{\alpha_1^{(n)}\alpha_1^{(n+1)}},\ c_0 = \frac{1}{\alpha_1^{(0)}},\ a_n = -\frac{\alpha_0^{(n)}}{\alpha_1^{(n)}}$$

と定義すれば変換

$$u_n = t_n v_n$$

によって (11.9) は (11.14) と同値になる.

**問 11.3** $\alpha_1^{(n)}$ は $c_0, b_n$ を用いて表せば

$$\alpha_1^{(2m)} = \frac{b_0^2\, b_2^2\, \cdots b_{2m-2}^2}{c_0\, b_1^2\, \cdots b_{2m-1}^2}, \quad \alpha_1^{(2m+1)} = -c_0 \frac{b_1^2\, b_3^2\, \cdots b_{2m-1}^2}{b_0^2\, b_2^2\, \cdots b_{2m}^2}$$

となることを示せ.

$P_n(z)$ の最高次の係数が $\alpha_1^{(0)} \cdots \alpha_1^{(n-1)}$ であることから

$$P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(-1)^n \alpha_1^{(n)}}}\, p_n(z),\ Q_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(-1)^n \alpha_1^{(n)}}}\, q_n(z)$$

となる. ゆえに (11.7), (11.8) より

$$F(z) = \frac{q_n(z) + q_{n-1}(z)\sqrt{-\frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_1^{(n-1)}}}\, V_n/U_n}{p_n(z) + p_{n-1}(z)\sqrt{-\frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_1^{(n-1)}}}\, V_n/U_n}. \tag{11.15}$$

そして (11.12), (11.13) はそれぞれ次の形に変形される:

$$F(z) = \frac{c_0 \big|}{\big| z - a_0} - \frac{b_0^2 \big|}{\big| z - a_1} - \frac{b_1^2 \big|}{\big| z - a_2} - \cdots - \frac{b_{n-2}^2 \big|}{\big| z - a_{n-1}} + \frac{V_n/\alpha_1^{(n-1)} \big|}{\big| U_n}, \tag{11.16}$$

$$\frac{q_n(z)}{p_n(z)} = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{c_0}{|z-a_0} \Big| - \frac{b_0^2}{|z-a_1} \Big| - \frac{b_1^2}{|z-a_2} \Big| - \cdots - \frac{b_{n-2}^2}{|z-a_{n-1}} \Big|. \tag{11.17}$$

たとえば

$$\frac{q_1(z)}{p_1(z)} = \frac{c_0}{z-a_0},$$

$$\frac{q_2(z)}{p_2(z)} = \frac{c_0(z-a_1)}{(z-a_0)(z-a_1)-b_0^2},$$

$$\frac{q_3(z)}{p_3(z)} = \frac{c_0\{(z-a_1)(z-a_2)-b_1^2\}}{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)-b_0^2(z-a_2)-b_1^2(z-a_2)}.$$

**問 11.4**　等式 (11.17) を導け.

## 11.4 Markov の定理

次の基本的な問題が生ずる:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = F(z) \tag{11.18}$$

であろうか?　どのような意味でそれが成り立つか?

次の定理はもっとも基本的である:

**定理 11.8** (Markov の定理)　$d\rho(x)$ の台 $\mathrm{Supp}\,(d\rho)$ がコンパクトならば (11.17) は $n\to\infty$ のとき $z \notin \widehat{\mathrm{Supp}\,(d\rho)}$ で収束し，等式 (11.18) が成立する. ここで $\widehat{\mathrm{Supp}\,(d\rho)}$ は $\mathrm{Supp}\,(d\rho)$ の凸包を表す.

(11.17) が $F(z)$ に収束するとき無限 Jacobi 連分数表示

$$F(z) = \frac{c_0}{|z-a_0} \Big| - \frac{b_0^2}{|z-a_1} \Big| - \frac{b_1^2}{|z-a_2} \Big| - \cdots - \frac{b_{n-2}^2}{|z-a_{n-1}} \Big| - \cdots.$$

と表す.

**証明.**　証明は [Pe2] に従う. $\widehat{\mathrm{Supp}\,(d\rho)} = [a,b]$ とする. $\zeta_{\pm\gamma} = \frac{a+b}{2} \pm i\gamma\,(\gamma > 0)$ とし $\zeta_{\pm\gamma}$ を中心とする半径 $r = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \gamma^2}$ の閉円盤を $\Gamma_{\pm\gamma}$ とおくと

$$\mathbf{C}-[a,b]=\bigcup_{\gamma>0}(\mathbf{C}-\Gamma_\gamma)\cup(\mathbf{C}-\Gamma_{-\gamma})$$

である．$z\in\mathbf{C}-[a,b]$ が $\mathbf{C}-\Gamma_\gamma$ に入っているものとする．

$$\mathrm{dis}\,(z,[a,b])\ge\delta_1 \quad \text{かつ} \quad \frac{|z-x|}{|z-\zeta_\gamma|}\le\delta_2<1\,(x\in[a,b])$$

を満たす正数 $\delta_1,\delta_2$ が存在する．ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-x}&=\frac{1}{z-\zeta_\gamma-(x-\zeta_\gamma)}\\&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(x-\zeta_\gamma)^k}{(z-\zeta_\gamma)^{k+1}}+\frac{(x-\zeta_\gamma)^{2n}}{(z-\zeta_\gamma)^{2n}}\frac{1}{z-x}.\end{aligned}$$

$f(x)$ を右辺第一項とすれば $f(x)$ は $2n-1$ 次の多項式である．そして

$$\left|\frac{1}{z-x}-f(x)\right|\le\frac{\delta_2^{2n}}{\delta_1}\quad(x\in[a,b])$$

が成り立つ．Gauss の機械的求積法 ((7.19) 参照) により等式

$$\int_a^b f(x)d\rho(x)=\sum_{k=1}^n\kappa_k f(x_k),$$

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}=\sum_{k=1}^n\frac{\kappa_k}{x-x_k}$$

が得られる．ただし $x_k$ は $P_n(x)$ の零点，$\kappa_k$ は対応する Christoffel 数である．ゆえに

$$\begin{aligned}&F(z)-\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\\&=\int_a^b\frac{d\rho(x)}{z-x}-\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\\&=\int_a^b\left\{\frac{1}{z-x}-f(x)\right\}d\rho(x)+\sum_{k=1}^n\kappa_k\left\{f(x_k)-\frac{1}{z-x_k}\right\}.\end{aligned}$$

$x,x_k\in[a,b]$ に注意して右辺第 1 項，第 2 項の絶対値は $c_0\frac{\delta_2^{2n}}{\delta_1}$ 以下であるから評価

$$\left|F(z)-\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\right|\le 2c_0\frac{\delta_2^{2n}}{\delta_1}$$

が得られる．$z\in\mathbf{C}-\Gamma_{-\gamma}$ に属する場合も同様である．こうして定理 11.8 が証明された．□

**注意 11.1** $d\rho(x)$ の台 Supp $(d\rho)$ がコンパクトであるための必要十分条件は第 7 章で述べた Jacobi 行列 $A$ が $\mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ において有界作用素 (bounded operator) (付録 A1 参照) であることである．特に $a_n, b_n$ $(b_n \neq 0)$ がすべて有界ならば $A$ は有界作用素となるゆえ (11.18) が成立する．

Supp $(d\rho)$ が非コンパクトの場合については後述する (命題 12.3 参照).

# 第 12 章

# 極限点と極限円

第 12 章では Padé 近似の収束性を判定する極限点・極限円について解説し，極限点の場合に Stieltjes 変換の無限連分数表示を与える．また極限円になる 2 個の実例を与える．さらにモーメント問題との関連について論じる．

## 12.1 1 次分数変換

この節では第 11 章 (11.2) の Padé 近似に現れる $P_n(z)$ は正規直交多項式 $p_n(z)$ と仮定する．以後 Jacobi 行列の成分 $b_n > 0$ と仮定する (第 7 章系 7.2 を参照).

第 11 章において近似有理式 $q_n(z)/p_n(z)$ を求め，$V_0/U_0$ と $V_n/U_n$ を結ぶ 1 次分数変換を導いた ((11.15) を参照).

いま $\zeta = -V_n/(\alpha_1^{(n-1)} U_n) \in \mathbf{C}$ とおくとき

$$b_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_1^{(n-1)}\alpha_1^{(n)}}}$$

(補題 11.7 を参照) であるから，(11.15) は次の 1 次分数変換の等式を表す:

$$\frac{V_0}{U_0} = \frac{q_n - q_{n-1}\zeta/b_{n-1}}{p_n - p_{n-1}\zeta/b_{n-1}} \quad (n \geq 1) \tag{12.1}$$

任意の $\zeta \in \mathbf{C}$ に対して右辺の 1 次分数変換を $T_n(\zeta)$ で表すことにする.

以下 $\Im z < 0$ と仮定する．このとき $T_n$ は上半平面 $\mathcal{H}_+$ をそれ自身に写す正則写像である:

$$T_n:\ \mathcal{H}_+ \ni \zeta \longrightarrow T_n(\zeta) \in \mathcal{H}_+.$$

実際 $T_n$ は上半平面 $\mathcal{H}_+$ をそれ自身に写す 1 次分数変換

$$T:\ \zeta \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha-\zeta} \quad (\Im\alpha < 0, \beta > 0)$$

の反復写像によって実現されている．

$\mathcal{H}_+$ の $T_n$ による像を $\Gamma_n$ と記すとき $\Gamma_n$ は $\mathcal{H}_+$ 内の円盤であって，包含関係

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_n \supset \cdots \tag{12.2}$$

が成り立つ．すなわち (11.15) より次の関係式が得られる:

**補題 12.1**

$$\begin{aligned} T_n(\zeta) &= \frac{c_0}{|z-a_0} \Big| - \frac{b_0^2}{|z-a_1} \Big| - \cdots - \frac{b_{n-2}^2}{|z-a_{n-1}-\zeta} \Big| \\ &= \frac{q_n(z)-q_{n-1}(z)\zeta/b_{n-1}}{p_n(z)-p_{n-1}(z)\zeta/b_{n-1}}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

## 12.2 極限点と極限円

**補題 12.2** $\Gamma_n$ の極限集合 $\Gamma_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ は次のいずれかである:

(i) $\Gamma_\infty$ は一点のみからなる．

(ii) $\Gamma_\infty$ は半径が正である円盤である．

前者を極限点 (limit point)，後者を極限円 (limit circle) という (文献 [We1], [Yo] 参照).

**問 12.1** 補題 12.2 を証明せよ．

**命題 12.3** $\Im z < 0$ を仮定する．$\Gamma_\infty$ が極限点ならば $\lim_{n\to\infty} T_n(\zeta)$ は $\zeta \in \mathcal{H}_+$ の取り方によらず広義一様収束し，極限公式

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n(z)}{p_n(z)} = F(z)$$

が成り立つ．そして $F(z)$ は収束する無限 Jacobi 連分数展開 (infinite continued fraction)

$$F(z) = \frac{c_0 |}{| z - a_0} - \frac{b_0^2 |}{| z - a_1} - \cdots - \frac{b_{n-2}^2 |}{| z - a_{n-1}} - \cdots \tag{12.4}$$

の表示をもつ．$\Im F(z) > 0$ である．

$\Im z > 0$ のときも (12.4) は同様に成り立つが $\Im F(z) < 0$ である．

**補題 12.4**　$\Im z \neq 0$ のとき円盤 $\Gamma_n$ の半径 $R_n$ は

$$R_n = \frac{1}{2|\Im z| \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} |p_\nu(z)|^2}$$

で与えられる．

**系 12.5**　$\Im z \neq 0$ のとき

$$\Gamma_\infty \text{ が極限点} \iff \sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z)|^2 = \infty. \tag{12.5}$$

**問 12.2**　補題 12.4 を証明せよ．

(ヒント: 1 次分数変換における鏡像の原理を利用すればよい (文献 [Takag] 参照).

$T_n\left(\dfrac{b_{n-1}p_n(z)}{p_{n-1}(z)}\right) = \infty$ であるから複素共役の点の像 $T_n\left(\overline{\dfrac{b_{n-1}p_n(z)}{p_{n-1}(z)}}\right)$ は $\Gamma_n$ の中心である．一方 $T_n(0)$ は $\Gamma_n$ の周上にある．問 7.3 を参照．)

次は Carleman の判定法として知られる (文献 [Ca], [Si1] 参照):

**命題 12.6**　$\Im z \neq 0$ のとき

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z)|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} < \infty.$$

言い換えれば

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty \tag{12.6}$$

ならば

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z)|^2 = \infty. \tag{12.7}$$

すなわち (12.6) が成り立てば極限点である.

**問 12.3** 命題 12.6 を証明せよ.

(ヒント: Christoffel-Darboux の公式から得られる等式

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2i\Im(p_{n+1}(z)\overline{p_n(z)})}{(z-\overline{z})\sum_{\nu=0}^{n}|p_\nu(z)|^2}$$

を利用する.)

モーメント $c_n$ に関する条件として次も Carleman の判定法として知られる:

**命題 12.7** 仮定から $c_{2\nu} > 0$ $(\nu \geq 0)$ であるが次の事実がいえる:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2\nu]{c_{2\nu}}} = \infty \Longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty. \tag{12.8}$$

**証明** 以下の証明は文献 [Si1] による. $d\rho$ に関する $x^n, p_n(x)$ の内積を $(x^n, p_n)_\rho$ と記すと

$$c_0^{-\frac{1}{2}} b_0^{-1} b_1^{-1} \cdots b_{n-1}^{-1} (x^n, p_n)_\rho = 1.$$

Schwarz の不等式 $(x^n, p_n)_\rho^2 \leq c_{2n}$ により

$$c_0 \leq c_{2n}(b_0 b_1 \cdots b_{n-1})^{-2}, \text{ すなわち},$$

$$\left(\frac{c_0}{c_{2n}}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (b_0 b_1 \cdots b_{n-1})^{-\frac{1}{n}}. \tag{12.9}$$

したがって命題 12.7 の主張は次の補題に帰着する. □

**補題 12.8**
$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_1 b_1 \cdots b_{n-1})^{-\frac{1}{n}} \leq 2e \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_\nu}$$

が成り立つ.

**証明.** 実際

$$(b_0 b_1 \cdots b_{n-1})^{-\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+1}{b_\nu}\right)^{\frac{1}{n}} (n!)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\leq \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+1}{b_\nu}}{n} (n!)^{-\frac{1}{n}} \leq \frac{e}{n^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu+1}{b_\nu} \quad (\because n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(b_0b_1\cdots b_{j-1})^{-\frac{1}{j}} &\le \sum_{j=1}^{n}\frac{e}{j^2}\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{\nu+1}{b_\nu}\\ &= e\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\nu+1}{b_\nu}\sum_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{j^2} \le 2e\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{b_\nu}.\end{aligned}$$

最後の不等式は

$$(\nu+1)\sum_{j=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{j^2} \le \frac{1}{\nu+1}+(\nu+1)\int_{\nu+1}^{\infty}\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{\nu+1}+1 \le 2$$

より明らか. □

この結果より第 10 章で述べた次の Markov の定理を再確認することができる.

**系 12.9**　Supp $(d\rho)$ がコンパクトならば $\Im z \neq 0$ のとき $\Gamma_\infty$ は極限点である.

**証明.**　実際 Supp $(d\rho) \subset [-r, r]$ と仮定すれば適当な正数 $K$ が存在して $0 < c_{2\nu} \le r^{2\nu}K$ $(\nu \ge 0)$ を満たすゆえ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2\nu]{|c_{2\nu}|}} \ge \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{r\sqrt[2\nu]{K}} = \infty.$$ □

## 12.3　モーメント問題

[モーメント問題]:「実数列 $(c_n)_{n\ge 0}$ が, その Hankel 行列がすべて正値であるように与えられているとき (以下この性質を満たすとき非退化 (non-degenerate) ということにする),

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\rho(x)$$

を満たす Stieltjes 測度 $d\rho(x)$ が存在するか?　それは一意的か?」

を問う問題を "H. Hamburger(あるいは F. Hausdorff) によるモーメントの決定問題" 略して "モーメント問題 (moment problem)" という. $d\rho(x)$ が一意的に存在するとき, モーメント問題は決定的 (determinate) であるという. そうでないとき非決定的 (indeterminate) であるという. 文献 [Ak], [Ha], [Takah] 参照.

**定理 12.10** 次の条件は互いに同値である:

(i) $\Im z_0 \neq 0$ をみたす或る点 $z_0$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z_0)|^2 = \infty.$$

(ii) $\Im z \neq 0$ であるすべての $z$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z)|^2 = \infty.$$

(iii) $\Gamma_\infty$ は極限点である.

(iv) Jacobi 行列 $A$ は $\mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ に作用する線形作用素として "実質的に自己共役"(定義 13.2 参照) である.

(v) モーメント問題は決定的である.

**証明.** (i) と (iv) あるいは (ii) と (iv) が同値であることは第 13 章で説明する (定理 13.9, 定理 13.14 を参照). (i), (ii) はそれぞれ (iii) と同値であることはすでに説明した. 極限点のときモーメント問題が解けることは対応する Jacobi 行列が実質的に自己共役であるゆえ, Green 関数が一意的に存在することから結論される. □

次にモーメント問題が非決定的な 2 個の実例を与える.

**例 12.1** $a_n = 0$, $b_n = (n+1)^s$ $(s \geq 0)$ である対称 Jacobi 行列を $A(s)$ とする. $A(s)$ は $s \leq 0$ のとき有界作用素, $s > 0$ のときは非有界作用素であるが, さらに命題 12.6 により $A(s)$ は $s \leq 1$ ならば実質的に自己共役である. じつは $s > 1$ ならば実質的に自己共役ではない. 以下この事実を示す. $z = -i$ を固定するとき (12.3) は次に等しい:

$$\begin{aligned} T_n(0) = \frac{q_n(-i)}{p_n(-i)} &= \frac{1 \,|}{|\, -i} - \frac{b_0^2 \,|}{|\, -i} - \cdots - \frac{b_{n-2}^2 \,|}{|\, -i} \\ &= i \left\{ \frac{1 \,|}{|\, 1} + \frac{b_0^2 \,|}{|\, 1} + \cdots + \frac{b_{n-2}^2 \,|}{|\, 1} \right\}. \end{aligned} \tag{12.10}$$

一般に (12.10) で表される連分数について Seidel-Stern の定理 (文献 [Pe2], [Hi] 参照) によれば次の事実が成り立つ:

**補題 12.11** (i)　$\lim_{m\to\infty} T_{2m}(0)$, $\lim_{m\to\infty} T_{2m+1}(0)$ は収束する.

(ii)　$\lim_{n\to\infty} T_n(0)$ が収束する，言い換えれば等式

$$\lim_{m\to\infty} T_{2m}(0) = \lim_{m\to\infty} T_{2m+1}(0)$$

が成立するための必要十分条件は次の 2 個の級数のいずれかが $+\infty$ に発散することである:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_0^2 \cdot b_2^2 \cdots b_{2\nu}^2}{b_1^2 \cdot b_3^2 \cdots b_{2\nu+1}^2}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_1^2 \cdot b_3^2 \cdots b_{2\nu-1}^2}{b_2^2 \cdot b_4^2 \cdots b_{2\nu}^2}. \tag{12.11}$$

例 12.1 の場合

$$\frac{b_{2\nu}^2}{b_{2\nu+1}^2} = 1 - \frac{s}{\nu} + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \frac{b_{2\nu-1}^2}{b_{2\nu}^2} = 1 - \frac{s}{\nu} + O\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

である．Gauss の判定法により $s > 1$ ならば (12.11) はどちらも収束するゆえ，$\lim_{n\to\infty} T_n(0)$ は収束しない．すなわち $\varGamma_\infty$ は極限円である．$A(s)$ は実質的に自己共役ではない (定理 12.10).

**問 12.4**　$N = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $b_n = (n+1)^s$　$(s \in \mathbf{R}_{\geq 0})$,　$a_n = 0$ $(0 \leq n \leq N-1)$ である $N \times N$ の対称 Jacobi 行列を $A_N(s)$ とおく．$A_N(s)$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とするとき

$$(N-1)^s \leq \lambda_{\max} \leq 2(N-1)^s$$

を満たすことを示せ．(ヒント: 等式 $\lambda_{\max} = \max_{\vec{u}\neq 0 \in \mathbf{R}^N} \dfrac{||A_N(s)\vec{u}||}{||\vec{u}||}$ を利用せよ．なお文献 [Fr] 参照.)

**例 12.2**　(文献 [IM] 参照)　$0 < q < 1$ に対して $a_n = 0$, $b_n = q^{-(n+1)/2}\sqrt{1-q^{n+1}}$ $(n \geq 0)$ の場合．このとき (12.7) は満たされない:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(it)|^2 < \infty \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

それゆえにこれは極限円の場合になる．以下この事実を示す．

**定義 12.12** $n$ 次多項式

$$h_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;\ q)_n}{(q;\ q)_k(q;\ q)_{n-k}}(-1)^k q^{k(k-n)}(x+\sqrt{x^2+1})^{n-2k} \quad (n \geq 0)$$

は漸化式

$$h_{n+1}(x|q) = 2xh_n(x|q) - q^{-n}(1-q^n)h_{n-1}(x|q) \quad (n \geq 0)$$

を満たす ( 記号 $(a;\ q)_n$, $(a;\ q)_\infty$ については 16.1 節を参照). $h_0(x|q) = 1$, $h_1(x|q) = 2x$, $h_2(x|q) = 4x^2 + 1 - q^{-1}$, etc. $\{h_n(x|q)\}_{n\geq 0}$ は $q$-Hermite 多項式という.

実際

$$H_n(x) = \lim_{q\uparrow 1} h_n(\sqrt{1-q}x|q^2)(1-q)^{-n/2}$$

とおくとき $H_n(x)$ は漸化式

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 0)$$

を満たす $n$-次 Hermite 多項式である (9.3 節参照).

$$p_n(x) = q^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{h_n(x|q)}{\sqrt{(q;\ q)_n}}$$

とおくときは $p_n(x)$ は Jacobi 行列 $a_n = 0, b_n = q^{-(n+1)/2}\sqrt{1-q^{n+1}}$ に関する固有方程式:

$$2xp_n(x) = q^{-n/2}\sqrt{1-q^n}\, p_{n-1}(x) + q^{-(n+1)/2}\sqrt{1-q^{n+1}}\, p_{n+1}(x)$$

を満たす． $p_n(x)$ は密度

$$d\rho_\eta(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} m_n \delta(x - x_n(\eta))dx$$

に関する正規直交多項式である．ここで

$$x_n(\eta) = \frac{1}{2}(e^\eta q^{-n} - e^{-\eta}q^n) \quad (q < e^{-\eta} < 1),$$

$$m_n = \frac{1}{(q^{-1-2n}e^{2\eta};\ q)_\infty(q^{1+2n}e^{-2\eta};\ q)_\infty(q;\ q)_\infty}.$$

$x = it\,(-1 \leq t \leq 1)$ とおくときは

$$|h_n(it)| \leq \sum_{k=0}^{n} C_1 q^{k(k-n)} \leq C q^{-n^2/4}.$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(it)|^2 \leq C^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n/2} = C^2 \frac{1}{1-q^{1/2}} < \infty.$$

**注意 12.1**　例 12.2 は異なる定数 $\eta$ に対して同一の Jacobi 行列が対応しておりモーメント問題が非決定的な例を与えている.

# 第 13 章

# Green 関数とスペクトル分解

第 13 章では自己共役な Jacobi 作用素の Green 関数と Padé 近似との関連を明らかにし，極限点と自己共役性の同値性を示す (文献 [Ca], [Sto], [Te], [Si1] 参照). また自己共役な Jacobi 作用素の正定値性と Siteltjes 測度 (重み関数) の台との関係について言及する.

## 13.1 自己共役な Jacobi 作用素と Green 関数

以下，Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ で考える.

$$\mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0}) = \{\vec{u} = (u_n)_{n\geq 0};\ \text{ある } N \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ があり } u_n = 0\ (n \geq N)\}$$

は $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間であって，明らかに

$$\mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0}) \subset \mathcal{H} \subset \mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}}.$$

実数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ および正数列 $(b_n)_{n\geq 0}$ を成分とする対称 Jacobi 行列

$$A = (a_{m,n})_{m,n\geq 0} \quad (a_{n,n} = a_n, a_{n,n+1} = a_{n+1,n} = b_n)$$

は線形写像

$$A:\ \mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0}) \ni \vec{u} \longrightarrow A\vec{u} \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}},$$

$$(A\vec{u})_n = b_{n-1}u_{n-1} + a_n u_n + b_n u_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

を定義する. ただし $u_{-1} = 0$ と約束する.

いま Jacobi 行列 $A$ によって表示され, 定義域 (付録 A1 定義 A1.4) が $D(\hat{A}_0) = \mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ である実対称な線形作用素 (付録 A1, A1.1 参照) $\hat{A}_0$ が与えられているものとする.

**補題 13.1**　$\hat{A}_0$ の随伴作用素 $\hat{A}_0^*$ は定義域を

$$D(\hat{A}_0^*) = \{\vec{u} = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H};\ A\vec{u} \in \mathcal{H}\}$$

とする Jacobi 行列 $A$ によって一意的に定義される線形閉作用素である.

**問 13.1**　補題 13.1 を示せ.

**定義 13.2**　$D(\hat{A}_0) \subset D(\hat{A}_0^*)$ であるが, さらに $\hat{A}_0^*$ が実対称作用素であって

$$D(\hat{A}_0^*) = D(\hat{A}_0^{**})$$

が成り立つとき $\hat{A}_0^*$ は自己共役作用素である (付録 A2 定義 A2.6 参照). このとき行列 $A$ は実質的に自己共役 (essentially self-adjoint) であるという.

以下 $A$ は実質的に自己共役と仮定する. $\hat{A}_0^*$ は自己共役であるが, 断らぬかぎり $\hat{A}_0^*$ を単に $A$ と略記しても今後の議論に支障はない. すなわち $A$ はヤコビ行列を表すこともあり, また $\mathcal{H}$ に作用する自己共役作用素を表すこともある.

$$D(A) = \{\vec{u} \in \mathcal{H}; A\vec{u} \in \mathcal{H}\}$$

とする. $\mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ の標準基底を $e_n = (\delta_{m,n})_{m\geq 0}\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく. $\mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ は $\{e_0, Ae_0, A^2e_0, \cdots\}$ によって張られ, その閉包は $\mathcal{H}$ に一致する.

**補題 13.3**　$n$ 次多項式 $p_n(x)$ $(n \geq 0)$ が一意に存在して

$$e_n = p_n(A)e_0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13.1}$$

と表される. 多項式列 $u_n = p_n(x)\,(u_{-1} = 0, u_0 = 1)$ は 3 項漸化式

$$xu_n = b_{n-1}u_{n-1} + a_n u_n + b_n u_{n+1} \tag{13.2}$$

を満たす (ただし $b_{-1}$ は任意, たとえば 1 としてよい). $p_n(x)$ は定数倍を除いて行列式 $\Delta^{(0,n-1)}(x)$ に等しい:

$$p_0(x) = 1,$$
$$p_n(x) = (-1)^n b_0^{-1} b_1^{-1} \cdots b_{n-1}^{-1} \Delta^{(0,n-1)}(x) \quad (n \geq 1).$$

ここで $\Delta^{(r,s)}(x)\,(r \leq s)$ は

$$\Delta^{(r,s)}(x) = \begin{vmatrix} a_r - x & b_r & & & \\ b_r & a_{r+1} - x & b_{r+1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{s-2} & a_{s-1} - x & b_{s-1} \\ & & & b_{s-1} & a_s - x \end{vmatrix}$$

によって定義される.

**問 13.2** 補題 13.3 を証明せよ.
(ヒント: $A^n e_0 \equiv b_0 b_1 \cdots b_{n-1} e_n \mod \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathbf{C} e_j$ に注意する.)

同様に,

**補題 13.4** 初期条件 $u_0 = 0, u_1 = b_0^{-1}$ を満たす (13.2) の解はただひとつ存在する. $u_n$ は $x$ の $n-1$ 次多項式 $u_n = q_n(x)$ であって

$$q_0(x) = 0,\ q_1(x) = b_0^{-1},$$

$$q_n(x) = (-1)^{n-1} b_0^{-1} b_1^{-1} \cdots b_{n-1}^{-1} \Delta^{(1,n-1)}(x) \quad (n \geq 2).$$

と表される.

非負整数 $N$ に対して有限内積

$$(\vec{u}, \vec{v})_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \overline{v}_n \quad (\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{H})$$

を定義しておく.

**補題 13.5** $\vec{u}, \vec{v} \in D(A)$ に対して

$$(A\vec{u}, \vec{v})_N - (\vec{u}, A\vec{v})_N = b_N (u_{N+1} \overline{v}_N - u_N \overline{v}_{N+1})$$

が成り立つ. $A$ が実質的に自己共役ならば

$$\lim_{N \to \infty} b_N (u_{N+1} \overline{v}_N - u_N \overline{v}_{N+1}) = 0$$

である.

実際 $A$ が実質的に自己共役ならば

$$\lim_{N\to\infty}(A\vec{u},\vec{v})_N = (A\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},A\vec{v}) = \lim_{N\to\infty}(\vec{u},A\vec{v})_N.$$

であるから.

**系 13.6**　$A$ が実質的に自己共役と仮定する. $\Im z \neq 0$ である $z$ を固有値とする固有ベクトル $\vec{u}\in D(A)$ は存在しない.

実際 $A\vec{u} = z\vec{u}$ と仮定する. このとき

$$0 = (A\vec{u},\vec{u}) - (\vec{u},A\vec{u}) = (z-\overline{z})(\vec{u},\vec{u})$$

より $\vec{u}=0$ がいえる.

次の命題は von Neumann のスペクトル分解定理として知られる (付録 A5 定理 A5.11 参照):

**命題 13.7** (i)　$A$ は $\mathcal{H}$ においてスペクトル分解

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = E(\infty) - E(-\infty), \tag{13.3}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) \tag{13.4}$$

をもつ. ここで $E(\lambda)$ は $dE(\lambda)$ が相異なる $\lambda,\lambda'$ に対して互いに直交するような $E(\infty)=I, E(-\infty)=0$ を満たす, 右連続な (自己共役な) 射影作用素の族である. 積分は Riemann-Stieltjes 積分の意味で行う.

(ii)　$\Im z \neq 0$ のとき, レゾルベント $(z-A)^{-1}$ はスペクトル分解

$$(z-A)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda} dE(\lambda) \tag{13.5}$$

をもつ, $\mathcal{H}$ 上の有界作用素である.

(iii)　$\alpha,\beta$ がともに $E(\lambda)$ の連続点ならば

$$E(\beta)-E(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\lambda)}{\mu+i\varepsilon-\lambda} - \frac{dE(\lambda)}{\mu-i\varepsilon-\lambda}\right)d\mu\right\}. \tag{13.6}$$

**定義 13.8** $m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ のとき，Green 関数 $G(m,n|z)$ およびスペクトル核 $\Theta(m,n|\lambda)$ が次のように定義される:

$$G(m,n|z) = ((z-A)^{-1}e_m, e_n),$$

$$\Theta(m,n|\lambda) = (E(\lambda)e_m, e_n).$$

$G(m,n|z)$ は $\Im z \neq 0$ で正則，$d\Theta(m,n|\lambda)$ は (実数値)Stieltjes 測度である．

命題 13.7 より

$$\delta_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta(m,n|\lambda), \tag{13.7}$$

$$a_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\Theta(m,n|\lambda), \tag{13.8}$$

$$G(m,n|z) = G(n,m|z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda} d\Theta(m,n|\lambda). \tag{13.9}$$

特に $\rho(\lambda) = \Theta(0,0|\lambda)$ とおくときは，$\rho(\lambda)$ は単調非減少であって

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = 1, \text{すなわち}, c_0 = 1, \tag{13.10}$$

$$d\Theta(m,n|\lambda) = p_m(\lambda)p_n(\lambda)d\rho(\lambda), \tag{13.11}$$

$$G(m,n|z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_m(\lambda)p_n(\lambda)}{z-\lambda} d\rho(\lambda). \tag{13.12}$$

を満たす．

**問 13.3** $N \times N$ 行列

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} d\Theta(m,n|\lambda)\right)_{0 \leq m,n \leq N-1} \quad (\alpha < \beta, \; N = 1,2,3,\cdots)$$

は半正定値であることを示せ．

以上をまとめれば，

**定理 13.9** (i) $p_n(x)$ は Stieltjes 測度 $d\rho(\lambda)$ に関する正規直交多項式である．

(ii) $\Im z \neq 0$ と仮定する．$F(z) = G(0,0|z)$ とおくとき $q_n(z)$ は (7.10) の積分表示を持つ．また $S_n(z) = G(0,n|z)$ とおけば

$$S_n(z) = F(z)p_n(z) - q_n(z), \tag{13.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |S_n(z)|^2 = -\frac{\Im F(z)}{\Im z} < \infty. \tag{13.14}$$

を満たす．すなわちベクトル $(S_n(z))_{n\geq 0}$ は $\mathcal{H}$ に属し，かつ $x$ を $z$ に置き換えれば (13.2) を満たす．

(iii)　$\rho(x)$ の連続点 $\alpha, \beta, (\alpha < \beta)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\alpha^\beta \{S_n(x+i\varepsilon) - S_n(x-i\varepsilon)\}dx = -2\pi i \int_\alpha^\beta p_n(x)d\rho(x) \tag{13.15}$$

が成り立つ．特に微分 $\rho'(x) = w(x)$ が Hölder 連続 (文献 [GM], [Ts] 参照) ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{S_n(x+i\varepsilon) - S_n(x-i\varepsilon)\} = -2\pi i\, p_n(x)w(x) \tag{13.16}$$

が成り立つ．

**証明.** (13.15), (13.16) は複素平面における特異積分に関する一般的な定理からの帰結である (文献 [Mu] 参照)．(13.14) のみを証明する．まず

$$F(z)p_n(z) - q_n(z) = G(0, n|z) = ((z-A)^{-1}e_0, e_n) \tag{13.17}$$

に注意する．レゾルベントの方程式により

$$(z-A)^{-1} - (\overline{z}-A)^{-1} = (\overline{z}-z)(z-A)^{-1}(\overline{z}-A)^{-1}.$$

また直交基底の完備性により

$$\begin{aligned}
&((\overline{z}-A)^{-1}(z-A)^{-1}e_0, e_0)\\
&= ((z-A)^{-1}e_0, (z-A)^{-1}e_0)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ((z-A)^{-1}e_0, e_n)(e_n, (z-A)^{-1}e_0)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\left((z-A)^{-1}e_0, e_n\right)|^2\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |F(z)p_n(z) - q_n(z)|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

ところが

$$((z-A)^{-1}-(\overline{z}-A)^{-1})e_0, e_0) = G(0,0|z) - G(0,0|\overline{z})$$
$$= 2i\,\Im F(z). \qquad \square$$

特に $\Im z \neq 0$ のとき，系 13.6 により $\vec{u} = (p_n(z))_{n\geq 0}$ は $\mathcal{H}$ に属さないゆえ $F(z)$ の無限連分数展開 ((12.4) 参照) に対応する $\Gamma_\infty$ は極限点である (系 12.5 参照).

かくして次の重要な事実が明らかになった.

“$\Im z \neq 0$ のとき，自己共役な Jacobi 作用素 $A$ の固有方程式

$$zu_n = b_{n-1}u_{n-1} + a_n u_n + b_n u_{n+1} \quad (n \geq 0) \tag{13.18}$$

は 2 個の 1 次独立な解 $(p_n(z))_{n\geq 0} \notin \mathcal{H}$ (ただし $p_{-1}(z) = 0$) および $(S_n(z))_{n\geq 0} \in \mathcal{H}$ をもつ．ただし形式的に $S_{-1}(z)b_{-1} = 1$ とおく.”

**例 13.1** $p_n(z)$ が第 1 種 Chebyshev 多項式あるいは第 2 種 Chebyshev 多項式の場合 $z = \frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}$ ($|\zeta| < 1$) に対してそれぞれ

$$G(0,0|z) = \frac{2\zeta}{1-\zeta^2}, \quad G(0,n|z) = 2^{3/2}\,\frac{\zeta^{n+1}}{1-\zeta^2} \quad (n \geq 1);$$
$$G(0,n|z) = 2\zeta^{n+1} \quad (n \geq 0)$$

である.

**補題 13.10** (離散的 Gauss-Green の公式) $0 \leq n \leq N$ に対して等式 (13.18) を満たす複素数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ に対して

$$(z-\overline{z})\sum_{n=M+1}^{N}|u_n|^2$$
$$= b_N(u_{N+1}\overline{u}_N - \overline{u}_{N+1}u_N) - b_M(u_{M+1}\overline{u}_M - \overline{u}_{M+1}u_M) \quad (0 \leq M \leq N)$$

が成り立つ.

**補題 13.11** (i) $$\alpha_n(z) = b_n\frac{G(m,n+1|z)}{G(m,n|z)} \quad (m \leq n) \tag{13.19}$$

とおくとき

(i) $\alpha_n(z)$ は極限点の場合であって次の無限連分数に展開される:

$$\begin{aligned}\alpha_n(z) &= \frac{b_n^2}{z - a_{n+1} - \alpha_{n+1}(z)} \\ &= \frac{b_n^2 \,|}{|\, z - a_{n+1}} - \frac{b_{n+1}^2 \,|}{|\, z - a_{n+2}} - \frac{b_{n+2}^2 \,|}{|\, z - a_{n+3}} - \cdots .\end{aligned} \tag{13.20}$$

(13.19) の右辺は $m$ の取り方によらない.

(ii)　$\Im z < 0$ ならば $\Im \alpha_n(z) > 0$ である.

**証明.** $\Im z < 0$ を仮定する. 系 13.6 より $F(z)$ の Padé 近似より得られる連分数展開 (12.4) は収束する. 与えられた $\beta_N \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して有限区間 $0 \leq n \leq N$ において境界条件

$$u_{-1} = 0,\ u_{N+1} = \beta_N u_N \tag{13.21}$$

($\beta_N = \pm\infty$ も許し, その場合には $u_N = 0$ を意味する) を満たす固有値問題 (13.18) の Green 関数 $G_N(m, n|z)$ は一意に存在し次の性質を満たす:

$$\begin{aligned} zG_N(m,n|z) &= b_{n-1}G_N(m,n-1|z) + a_nG_N(m,n|z) + b_nG_N(m,n+1|z) \\ &\qquad + \delta_{m,n} \quad (0 \leq m, n \leq N-1), \\ G_N(m,n|z) &= G_N(n,m|z). \end{aligned}$$

実際 $G_N(m, n|z)$ の構成は次のようにすればよい. (13.21) を満たす方程式 (13.18) の非自明な解 $u_n = \psi_n(z)\,(0 \leq n \leq N+1)$ が定数倍を除いて一意的に存在する. $p_n(z)$ と $\psi_n(z)$ は 1 次独立であってその Wronskian は

$$[\psi, p] = b_{n-1}(\psi_{n-1}(z)p_n(z) - p_{n-1}(z)\psi_n(z))$$

によって定義される (右辺は $n$ に依存しないゼロでない $z$ の関数). このとき

$$G_N(m,n|z) = \frac{-1}{[\psi,p]} \begin{cases} \psi_n(z)p_m(z) & (0 \leq m \leq n \leq N+1) \\ p_n(z)\psi_m(z) & (0 \leq n \leq m \leq N+1). \end{cases}$$

次に

$$\alpha_n^{(N)}(z) = b_n \frac{G_N(m,n+1|z)}{G_N(m,n|z)} \quad (m \leq n)$$

とおくとき有限連分数表示

$$\alpha_n^{(N)}(z) = \frac{b_n^2 \;|}{|\; z - a_{n+1}} - \frac{b_{n+1}^2 \;|}{|\; z - a_{n+2}} - \cdots - \frac{b_{N-1}^2 \;|}{|\; z - a_N - \beta_N b_N} \tag{13.22}$$

が得られる．仮定より $\beta_N b_N \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. $\Gamma_\infty$ が極限点であることにより $N \to \infty$ のとき (13.22) は下半面において広義一様収束する (命題 12.3 参照):

$$\alpha_n(z) = \lim_{N\to\infty} \alpha_n^{(N)}(z).$$

すなわち無限連分数表示 (13.20) が得られる．さらに

$$G'(m,n|z) := \lim_{N\to\infty} G_N(m,n|z) \quad (0 \le m, n < \infty)$$

が存在し等式

$$G'(m,n|z) = \frac{\alpha_m(z)}{b_m} \cdots \frac{\alpha_{n-1}(z)}{b_{n-1}} G'(m,m|z) \quad (m \le n) \tag{13.23}$$

を得る．$G'(m,n|z)$ は $m, n$ に関して対称である．境界条件 (13.21) を考慮して離散的 Gauss-Green の公式 (補題 13.10) より

$$|\Im z| \sum_{n=m+1}^{N} |G_N(m,n|z)|^2 = b_m \, \Im \alpha_m^{(N)}(z) \, |G_N(m,m|z)|^2$$

が成り立つゆえ $N \to \infty$ のとき

$$|\Im z| \sum_{n=m+1}^{\infty} |G'(m,n|z)|^2 = b_m \, \Im \alpha_m(z) \, |G'(m,m|z)|^2. \tag{13.24}$$

特に $\Im \alpha_m(z) > 0$ である．

$G'(m,n|z)$ は自己共役作用素 $A$ の Green 関数の性質をすべて満たし作用素

$$\hat{G}'_z : \vec{v} \longrightarrow \vec{u} = \hat{G}'_z(\vec{v}), \quad u_m = \sum_{n=0}^{\infty} G'(m,n|z) v_n$$

は $\mathcal{H}$ からそれ自身への有界線形作用素を定義する．ゆえに $G'(m,n|z)$ は $A$ のレゾルベント $(zI - A)^{-1}$ に対応する Green 関数 $G(m,n|z)$ と一致する．

$\Im z > 0$ のときも議論は同様にできる． □

## 13.2　基本定理

前節では $A$ が実質的に自己共役ならば $F(z)=G(0,0|z)$ の Padé 近似より得られる連分数展開 (12.4) が極限点になることを示した．本節では逆に $F(z)$ に対応する連分数展開が極限点である場合に $A$ は実質的に自己共役で $F(z)$ が $A$ の Green 関数 $G(0,0|z)$ に等しいことを示したい．

本節および次節では Jacobi 行列 $A$ の定義する $\mathcal{H}$ における線形閉作用素 $\hat{A}_0^*$ を記号の濫用によって単に $A$ と略記する (補題 13.1, 付録 A1 例 A1.1 参照)．まず境界条件 (13.21) の下に方程式 (13.18) の Green 関数 $G_N(m,n|z)$ から出発する．

**補題 13.12**　$\Gamma_\infty$ が極限点であるとすると，(13.20) および Green 核 $G'(m,n|z)=\lim_{N\to\infty} G_N(m,n|z)$ は存在し以下のように帰納的に決定される:

(i)　$G'(0,0|z)=F(z)=\dfrac{1}{z-a_0-\alpha_0(z)}$,

$$G'(m,m|z)=\frac{1-\alpha_{m-1}(z)G'(m-1,m-1|z)}{z-a_m-\alpha_m(z)}\quad (m\geq 1).$$

(ii)　さらに $G'(m,n|z)$ は $m,n$ に関して対称であって (13.23) および次を満たす:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|G'(m,n|z)|^2<\infty. \tag{13.25}$$

**問 13.4**　補題 13.12 を証明せよ．

Green 核 $G'(m,n|z)$ によって定義される $\mathcal{H}$ における有界作用素を $\hat{G}'_z$ で表すとき，次の事実が成り立つ:

**命題 13.13**　$z$ $(\Im z\neq 0)$ をひとつ固定する．

(i)　$R(\hat{G}'_z)\subset D(A)$ であって次が成り立つ:

$$(z-A)\cdot\hat{G}'_z=I.$$

すなわち

$$\begin{aligned}zG'(n,m|z)=&b_{n-1}G'(n-1,m|z)+a_nG'(n,m|z)\\&+b_nG'(n+1,m|z)+\delta_{n,m}\quad (n,m\geq 0).\end{aligned}$$

(ii) さらに次の等式が成り立つ:

$$\hat{G}'_z \cdot (zI - A)\vec{u} = \vec{u} \quad (\vec{u} \in D(A)).$$

その結果 $D(A) = R(\hat{G}'_z)$ がいえる.

**証明.** 等式 (i) は定義より明らかである. 等式 (ii) を示さねばならない. 実際 $\vec{u} \in D(A)$ に対して $\vec{v} = (zI - A)\vec{u} \in \mathcal{H}$ とおく. $\vec{u}$ は一般性を失うことなく実ベクトルと仮定してよい. 補題 13.10 の Green 核を用いて離散的な Gauss-Green の公式を適用すれば, 等式

$$zG_N(m, 0|z) - b_0 G_N(m, 1|z) - a_0 G_N(m, 0|z) = 0$$

に注意して

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N} G_N(m, n|z) v_n \\ &= u_n + b_N\{u_N G_N(n, N+1|z) - u_{N+1} G_N(n, N|z)\}.\end{aligned}$$

特に $\beta_N = u_{N+1}/u_N$ とおくときは等式

$$\sum_{n=0}^{N} G_N(m, n|z) v_n = u_n \quad (0 \leq m \leq N)$$

が得られる. 極限は $\beta_N$ の取り方によらないので $N \to \infty$ とすることにより

$$\sum_{n=0}^{\infty} G'(m, n|z) v_n = u_n \quad (n \geq 0).$$

これで (ii) が示された. □

極限点と $A$ の自己共役性が同値であることを示す基本定理は次のように述べられる (文献 [Ak], [Sto], [Si1] 参照).

**定理 13.14** $\Im z_0 \neq 0$ を満たす点 $z_0 \in \mathbf{C}$ に対して極限点, すなわち等式

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_\nu(z_0)|^2 = \infty$$

を満たすならば作用素 $A$ は実対称閉作用素であって $A = A^*$ が成り立つ. すなわち行列 $A$ は実質的に自己共役である. そして $\Im z \neq 0$ を満たす任意の $z \in \mathbf{C}$

に対して $\hat{G}'_z$ は $zI - A$ の逆作用素 (レゾルベント) を表す，すなわち $G'(m,n|z)$ は $A$ の Green 関数 $G(m,n|z)$ に等しい．

**証明.** $A$ が閉作用素であることは前に述べた (補題 13.1).

$A$ が対称であることを示す．実際命題 13.13 (ii) により $\vec{u}, \vec{v} \in D(A)$ に対して $\vec{u} = \hat{G}_{z_0}\vec{u}'$ ($\vec{u}' \in \mathcal{H}$) と書ける．ゆえに命題 13.13 (i) より

$$(\vec{u}', \vec{v}) = ((z_0 - A)\hat{G}_{z_0}\vec{u}', \vec{v}) = ((z_0 - A)\vec{u}, \vec{v}).$$

再び命題 13.13 より

$$\begin{aligned}(\vec{u}', \vec{v}) &= (\vec{u}', \hat{G}_{\overline{z_0}}(\overline{z_0} - A)\vec{v}) = (\hat{G}_{z_0}\vec{u}', (\overline{z_0} - A)\vec{v}) \\ &= (\vec{u}, (\overline{z_0} - A)\vec{v}).\end{aligned}$$

これより等式 $(A\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A\vec{v})$ を得る． □

系 13.6 と定理 13.14 の帰結として次のことがわかる:

**系 13.15** $\Im z_0 \neq 0$ を満たす <u>或る点</u> $z_0$ に対して極限点ならば，じつは $\Im z \neq 0$ を満たす <u>すべての点</u> $z$ に対して極限点である．

$G(m,n|z) = G(n,m|z)$ は次の方程式を満たす:

$$\begin{aligned}&(z - a_n)G(m,n|z) \\ &= b_{n-1}G(m,n-1|z) + b_nG(m,n+1|z) + \delta_{m,n} \quad (m,n \geq 0).\end{aligned} \tag{13.26}$$

ただし $G(-1,n|z) = G(n,-1|z) = 0$ とおく．

さらに $\Im z \neq 0$ のとき

$$W_n(z) = \frac{1}{G(n,n|z)} \; (n \geq 0) \tag{13.27}$$

とおくとき

$$W_n(z) \approx z \quad (|z| \gg 1;\ \delta \leq |\arg z| \leq \pi - \delta) \; (\delta \text{ は小正数}) \tag{13.28}$$

である．

**補題 13.16** $\beta_n(z) = b_{n-1}\dfrac{G(m,n-1|z)}{G(m,n|z)} \quad (0 \leq n \leq m)$

は $m$ の取り方によらない．そして次の等式が成り立つ:

$$\text{(i)} \quad z - a_n - \alpha_n(z) - \beta_n(z) = W_n(z), \tag{13.29}$$

$$\text{(ii)} \quad z - a_n - \alpha_n(z) - \frac{b_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}(z)} = 0,$$

$$\text{(iii)} \quad \beta_n(z) = \frac{W_n(z)}{W_{n-1}(z)}\alpha_{n-1}(z).$$

ただし $W_{-1}(z) = \infty$ とおく．

**証明.** (i), (ii) は (13.26) の両辺をそれぞれ $m = n$, $m < n$ の場合に $G(m,n|z)$ で割ることによって得られる．(iii) は定義より従う． □

補題 13.16 (i), (ii), (iii) を $\alpha_n(z), \beta_n(z)$ に関して一意的に解くことができる:

$$\alpha_n(z) = \frac{1}{2}\{-W_n + \sqrt{W_n^2 + 4b_n^2 W_n/W_{n+1}}\},$$
$$\beta_n(z) = \frac{1}{2}\{-W_n + \sqrt{W_n^2 + 4b_{n-1}^2 W_n/W_{n-1}}\}.$$

そして

$$\Im z\, \Im\alpha_n(z) < 0,\ \Im z\, \Im\beta_n(z) < 0 \quad (\Im z \neq 0) \tag{13.30}$$

を満たす．これらの等式を (13.29) に代入すれば次の定理が得られる:

**定理 13.17** $W_n(z)$ は等式

$$z - a_n - W_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2W_n + \sqrt{W_n^2 + 4b_n^2 W_n/W_{n+1}} + \sqrt{W_n^2 + 4b_{n-1}^2 W_n/W_{n-1}}\right)$$
$$(n \geq 0) \tag{13.31}$$

を満たす．逆に (13.28), (13.30), (13.31) を満たす $W_n$ はただひとつ存在し，(13.27) で与えられる．

**問 13.5** 次の等式を示せ:

$$p_n(z) = \lim_{m\to\infty}\frac{G(m,n|z)}{G(m,0|z)}.$$

(ヒント: 右辺は $n$ の関数として 3 項漸化式を満たす．)

**注意 13.1**　これらの結果はじつは任意の樹木グラフ (tree) 上の隣接作用素 (adjacency operator) に拡張することができる (文献 [Ao1] 参照). 対称な無限グラフ上のランダムウオーク (random walk) と直交多項式との関連も議論されている (文献 [HO] 参照).

**注意 13.2**　対称 Jacobi 作用素 $A$ が実質的に自己共役ではない場合には $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ の無限遠に適当な境界条件を設定して $\hat{A}_0$ の自己共役な拡張を求める必要がある. すなわち境界条件 (13.21) において $\beta_N$ を Green 関数の極限

$$\lim_{N\to\infty} G_N(m,n|z) = G(m,n|z)$$

が収束するように選ぶ必要がある. こうして様々な境界条件に対応する Green 関数が得られる (文献 [Nevan], [Si1] 参照). 例 12.2 で述べた例はその拡張のひとつの例である.

## 13.3　正定値 Jacobi 作用素

Jacobi 作用素が非負定値または正定値作用素 (付録 A5 定義 A5.16 参照) である場合を考察する.

**定理 13.18**　$A$ が非負定値であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Supp}(d\rho) \subset [0,\infty) \tag{13.32}$$

を満たすことである. また $A$ が正定値であるための必要十分条件は (13.32) の他に $\rho(0)=0$ を満たすことである.

**証明.** (i)　まず $A$ が非負定値と仮定する. (付録 A5 定理 A5.17) により $E(-0)=0$. ゆえに $\rho(\lambda)=||E(\lambda)e_0||^2=0\,(\lambda<0)$ がいえる.

逆に $d\rho(\lambda)$ が (13.32) を満たすとする. $\vec{u}=\sum\limits_{n=0}^{N} u_n e_n \in D(A)$ を任意にとるとき

$$\vec{u}=\sum_{n=0}^{N} u_n p_n(A) e_0$$

(補題 13.3 参照) および

$$\lambda^n d\rho(\lambda) = (A^n dE(\lambda)e_0, e_0)$$

(付録 A2 定理 A2.17, 定義 13.8 参照) に注意して

$$\begin{aligned}(A\vec{u},\vec{u}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(dE(\lambda)\vec{u},\vec{u}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} u_n\overline{u}_m(dE(\lambda)e_n, e_m) \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{-\delta}^{\infty} \lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} u_n\overline{u}_m p_n(\lambda)p_m(\lambda)d\rho(\lambda) \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{-\delta}^{\infty} \lambda \lim_{N\to\infty} \left|\sum_{n=0}^{N} u_n p_n(\lambda)\right|^2 d\rho(\lambda) \geq 0. \end{aligned} \tag{13.33}$$

つまり付録 A5 (A5.9) が成立する.

次に $A$ が正定値と仮定する. 付録 A5 定理 A5.17 により $E(0)=0$. ゆえに $\rho(0) = ||E(0)e_0||^2 = 0$.

最後に逆に $\rho(0)=0$ と仮定する.

$$E(0)e_n = E(0)p_n(A)e_0 = p_n(A)E(0)e_0 = 0.$$

$E(0) = E(0) - E(-0)$ は有界作用素であるから $E(0)\vec{u} = 0\,(\vec{u}\in\mathcal{H})$ である. □

**注意 13.3** $\mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ 上の Jacobi 作用素 $A$ が非負定値のとき行列 $A$ は非負定値であるからすべての行列式 $\Delta^{(r,s)}(0) \geq 0$ $(0 \leq r < s)$ でなければならない (補題 13.3 参照). これはまた十分条件でもある. 実際, 行列 $A$ は非負定値になるから $\vec{u} = (u_n)_{n\geq 0} \in D(A)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left|\sum_{n=0}^{N} u_n p_n(\lambda)\right|^2 d\rho(\lambda) \geq 0 \quad (N \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

が成り立っている. ゆえに (13.33) と同様にして $(A\vec{u},\vec{u}) \geq 0$ がいえる. 一方 Jacobi 作用素 $A$ が正定値のとき行列 $A$ から得られるすべての行列式 $\Delta^{(r,s)}(0) > 0$ $(0 \leq r < s)$ でなければならない. しかしこれは作用素 $A$ が正定値であるための十分条件ではない.

**例 13.2**　区間 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上の連続関数 $w(x)>0$ と正数 $c$ に対して Stieltjes 測度

$$d\rho(x)=\begin{cases} c\delta(x)dx & (x<a) \\ w(x)dx & (a\le x\le b) \\ 0 & (b<x) \end{cases}$$

を考察する．このとき $n$ 次正規直交多項式 $p_n(x)$ $(n\ge 1)$ の零点はつねに正である．なぜならばもし $p_n(0)=0$ ならば $f(x)=\dfrac{p_n(x)}{x}$ は $n-1$ 次多項式で $p_n(x)$ と直交するはずである．しかし

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_n(x)f(x)d\rho(x)=\int_a^b\frac{p_n^2(x)}{x}w(x)dx>0$$

となる事実と矛盾する．したがって $A$ は Jacobi 行列として正定値であるが $\rho(0)=c\neq 0$ であるから自己共役な Jacobi 作用素としては正定値ではない (付録 A5 定理 A5.17 参照)．このような例としては (文献 [HO] 命題 4.3 参照)．

# 第 14 章

# 漸近展開

この章では古典的直交多項式 $P_n(x)$ およびその Stieltjes 変換 $S_n(x)$ の $n \to \infty$ における漸近的な振る舞いの主要項を付録 A6 に述べた鞍点法 (最急降下法) を利用して求める.

## 14.1 Jacobi 多項式の漸近展開

Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は，多価解析関数の積分であるツウィスト de Rham コホモロジーを用いて，次のように表される ((8.10) 参照):

$$2^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\sigma_x}\Phi(t)dt \quad (-1<x<1). \tag{14.1}$$

ただし

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= (1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}(t-x)^{-n-1}\\ &= \exp[nf(t)]g(t),\\ f(t) &= \log(1+t)+\log(1-t)-\log(t-x),\\ g(t) &= \frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{t-x}.\end{aligned}$$

は Riemann 球面 $\mathbf{C}P^1$ において定義される乗法関数 (multiplicative function) で $-1<t<1$ において $(1-t)^\alpha>0$ $(1+t)^\beta>0$ となるように分岐をとっておく．また $\sigma_x$ は $x$ の周囲を正の向きに一周する小ループ (loop) を表す.

以下一般性を失うことなく $0<x<1$ を仮定してよい．Riemann 面 $X = \mathbf{C}-\{-1,1,x\}$ 上の勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}\,\Re f(t)$(付録 A6, A6.3 節参照) の停留点

(stationary point) は 2 点ありそれらは方程式

$$\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-x}=0 \tag{14.2}$$

の解であって $c_1=x-i\sqrt{1-x^2}, c_2=x+i\sqrt{1-x^2}$ で与えられる．すなわち $x=\cos\theta\,(0<\theta<\pi/2)$ とおけば $c_1=e^{-i\theta}, c_2=e^{i\theta}$ である．$t=\pm1$ を始点とし無限遠にのびる grad $\Re f(t)$ の軌道 (orbit) $\mathcal{O}$ の $t=\pm1$ での接線の偏角が $\psi_{\pm1}$ であるとき，$\mathcal{O}$ はすべて $-x$ を端点とし偏角 $\psi_1$ あるいは $\psi_{-1}$ の半直線 $L_{-x}$ を漸近線としてもつ．grad $\Re f(t)$ の相図は図 14.1 のようである．

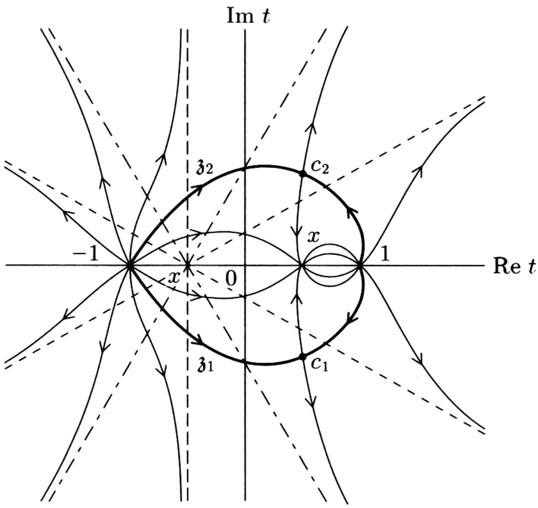



**図 14.1**

$c_k$ を $(+\infty)$ 極限点とする安定サイクルをそれぞれ $\mathfrak{z}_k$ で表す．$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ は $\pm1$ を $(-\infty)$ 極限点としそれぞれ下半面，上半面に位置する．両者は実軸に関して対称．$\mathfrak{z}_2$ の $t=\pm1$ での接ベクトルの偏角 $\psi_{\pm1}$ は $0<\psi_1=\psi_{-1}<\pi/2$ を満たす．また $c_k$ を通る不安定サイクル $\mathfrak{z}'_k$ は $x$ を端点とし，$-x$ を端点とする偏角が $\psi_1$ に等しい半直線 $L_{-x}$ を漸近線としている．$\mathfrak{z}'_k$ の $x$ での接線の偏角 $\psi_x$ は $\pi-\psi_1$ に等しい．さて

$$y_k = \int_{\mathfrak{z}_k} \Phi(t)dt \tag{14.3}$$

と定義する．$\mathfrak{z}_k$ の任意の点 $t$ に対して $\arg(t-1) = \varphi_1, \varphi_{-1} = \arg(t+1), \varphi_x = \arg(t-x)$ とおくときは

$$\Im f(t) - \pi = \varphi_1 + \varphi_{-1} - \varphi_x = -\psi_1 \quad (t \in \mathfrak{z}_1),$$

$$\Im f(t) + \pi = \varphi_1 + \varphi_{-1} - \varphi_x = \psi_1 \quad (t \in \mathfrak{z}_2).$$

$e^{f(c_k)} = -2e^{\mp i\theta}, f''(c_k) = \frac{e^{\pm i(\theta + \frac{\pi}{2})}}{\sin\theta}$ に注意して付録 A6 定理 A6.1 を適用すれば $y_k$ の $n \gg 1$ での漸近公式

$$y_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(-1)^n 2^{\alpha+\beta+n} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i\alpha(\pi-\theta)}{2} - \frac{i\beta\theta}{2} - i\theta\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{3\pi i}{4}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{14.4}$$

$$y_2 \approx \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(-1)^n 2^{\alpha+\beta+n} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{i\alpha(\pi-\theta)}{2} + \frac{i\beta\theta}{2} + i\theta\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{3\pi i}{4}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{14.5}$$

を得る．さらに $X$ 上のツウィスト・ホモロジー類として $\sigma_x \sim \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$ なるゆえ，等式

$$2^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}(y_1 - y_2)$$

に注意して次の主張を得る:

**命題 14.1**

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\alpha} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\beta} \cdot \cos\left[\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\theta - \frac{1}{2}\pi\alpha - \frac{1}{4}\pi\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (0 < \theta < \pi).$$

次に $x > 1$ の場合を考える．

第 2 解 $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2(x-1)^\alpha(x+1)^\beta S_n(x)$ は，次の積分表示をもつ ((8.11) 参照):

$$2^{n+1}(x-1)^\alpha(x+1)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} \Phi(t)dt. \tag{14.6}$$

ここで $(x-1)^\alpha > 0, (x+1)^\beta > 0$ となるように分岐をとる．$\sigma_x$ は $\mathbf{C}-\{-1,1\}$ において区間 $(-1,1)$ の点 $x$ から上半面において解析的延長により同位的 (isotopic) に変形するものとする．その結果 $(1-t)^\alpha$ は $t \in \sigma_x$ においては $(t-1)^\alpha e^{-\pi i\alpha}$ に等しい．

$\Re f(t)$ の停留点すなわち (14.2) の解は $c_1 = x - \sqrt{x^2-1}, c_2 = x + \sqrt{x^2-1}$ であって $0 < c_1 < 1 < x < c_2$. さらに

$$e^{f(c_1)} = -2(x - \sqrt{x^2-1}), \quad e^{f(c_2)} = -2(x + \sqrt{x^2-1})$$

かつ

$$f''(c_1) = -\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} < 0, \quad f''(c_2) = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} > 0.$$

$c_1$ を $(+\infty)$-極限点とする安定サイクル $\mathfrak{z}_1$ は区間 $[-1,1]$ と一致する．$c_2$ を $(+\infty)$-極限点とする安定軌道 $\mathfrak{l}$ は $c_1$ を $(-\infty)$-極限点とし区間 $[c_1, c_2]$ を囲むなめらかなループである．そして安定サイクル $\mathfrak{z}_2$ は

$$\mathfrak{z}_2 = (1 - e^{2\pi i\alpha})[c_1, 1] + \mathfrak{l}$$

で与えられる．$t = -1$ を始点とする $\operatorname{grad} \Re f(t)$ の軌道 $\mathcal{O}$ は $-1$ における接線

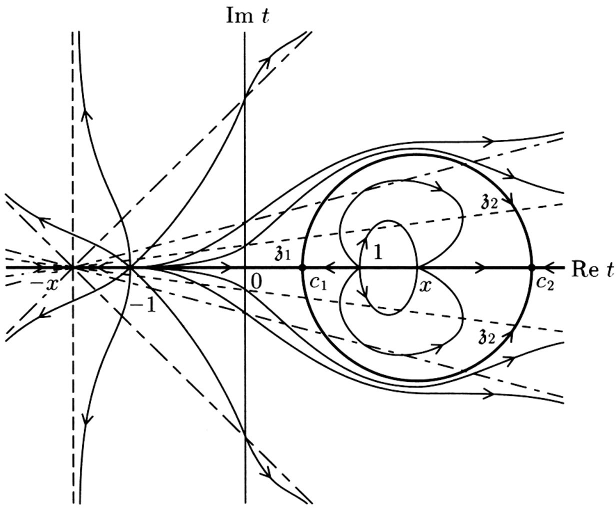



図 14.2

の偏角 $\psi_{-1}\,(0<\psi_{-1}<\pi)$ をもつならば，偏角が $\psi_{-1}$ の半直線 $L_{-x}$ を漸近線とする (図 14.2 参照).

ゆえに $t=c_2$ においては $(1-c_2)^\alpha=(c_2-1)^\alpha e^{-\pi i\alpha}$. (14.6) より

$$2^{n+1}(x-1)^\alpha(x+1)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^{n+1}y_1.$$

また $X$ におけるツウィスト・ホモロジー類として $\sigma_x\sim\mathfrak{z}_2$ であるから $(1-x)^\alpha=(x-1)^\alpha e^{-\pi i\alpha}$ に注意して

$$e^{-\pi i\alpha}2^n(x-1)^\alpha(x+1)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2\pi i}y_2.$$

付録 A6 定理 A6.1 よりただちに

$$\begin{aligned} y_1 &\approx \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(-1)^{n+1}2^{n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}}(x-1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+1)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \\ &\quad\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \tag{14.7}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= i\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,e^{-\pi i\alpha}(-1)^n2^{n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}}(x-1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+1)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \\ &\quad\cdot(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{14.8}$$

こうして次の命題を得る:

**命題 14.2** $x>1$ のとき $n\gg 1$ に対して次の漸近展開を得る:

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,2^{\frac{-1+\alpha+\beta}{2}}(x-1)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+1)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \\ &\quad\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,2^{\frac{-1+\alpha+\beta}{2}}(x-1)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+1)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \\ &\quad\cdot(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

さらに $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ を $\mathbf{C}-\{-1,1\}$ において $x\in(1,\infty)$ から上半面において解析的延長を行えばホモロジー類として $[-1,1]$ は同位的に $\mathfrak{z}_1$ に移る．すなわち等式

$$e^{\pi i\alpha}2^{n+1}(1-x)^{\alpha}(x+1)^{\beta}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^{n+1}y_1\quad(-1<x<1)$$

が得られる．その結果 (14.4) より，

**命題 14.3**　$x=\cos\theta\,(0<\theta<\pi)$ のとき $n\gg 1$ に対して

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\exp\left[-i\theta\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)-\frac{i\alpha\pi}{2}-\frac{\pi i}{4}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

## 14.2　Laguerre 多項式の場合

まず $x>0$ の場合を考察する．Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ はツウィスト積分をもちいて

$$e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_x}\Phi(t)dt,\tag{14.9}$$
$$\Phi(t)=\frac{e^{-t}t^{\alpha+n}}{(t-x)^{n+1}}\quad(x>0)$$

と表示される (9.2 節参照)．ここで $\sigma_x$ は $x$ を正の向きに 1 周する小ループを表す．$\sigma_1,\sigma_2$ を $t$ の正実軸が点 $x$ を迂回したもの，すなわち $\delta$ を小正数として $x$ を中心とする半径 $\delta$ の上半円周を $\Gamma_\delta^+$, 下半円周を $\Gamma_\delta^-$ で表すとき

$$\sigma_1:\{[0,\infty)-[x-\delta,x+\delta]\}\cup\Gamma_\delta^-,$$
$$\sigma_2:\{[0,\infty)-[x-\delta,x+\delta]\}\cup\Gamma_\delta^+$$

によって定義する．$\mathbf{C}-\{0\}$ におけるツウィスト・サイクルとしてはホモローグな関係 $\sigma_x\sim\sigma_1-\sigma_2$ が成り立つ．

(14.9) に対してそのままでは鞍点法は適用できない．以下は変数変換を行って鞍点法を適用する O.Perron の方法 (文献 [Pe1] 参照) に従う．(14.9) の右辺について変数変換 $t=\sqrt{n}s$ を行えば

$$y_k=\int_{\sigma_k}\Phi(t)dt$$
$$=n^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\sigma_k/\sqrt{n}}e^{-\sqrt{n}s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}s}\right)^{-n-1}ds\tag{14.10}$$

が定義される．ここで $\sigma_k/\sqrt{n}$ は $\sigma_k$ を原点を中心として $1/\sqrt{n}$ 倍に縮めたもの．さて $|s| \geq \rho\,(\rho > 0,$ 正定数) においては $n \gg 1$ に対して $n^{1/2}$ に関する Laurent 展開が可能である:

$$-(n+1)\log\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}s}\right) = \sqrt{n}\,\frac{x}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{A_l}{n^{l/2}}$$

ただし $A_l$ は $\frac{x}{s}$ の多項式であって $n$ には依存しない．ゆえに (14.10) の右辺の被積分関数は $n^{1/2}$ に関して Laurent 展開表示される:

$$\exp\left[\sqrt{n}\left(-s+\frac{x}{s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right]\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{B_l}{n^{l/2}}\right)s^{\alpha-1}.$$

$B_l$ は $x/s$ の多項式である．

$f(s) = -s + \frac{x}{s}$ とおく．$\Re f(s)$ の停留点 $c_1, c_2$ はそれぞれ $\mp i\sqrt{x}, f(c_k) = \pm 2i\sqrt{x}, f''(c_k) = \mp 2i/\sqrt{x}$．ゆえに $\Re s < 0$ かつ $|s| < \sqrt{|x|}$ ならば $\Re f(s) < \Re f(c_k) = 0$.

**補題 14.4** 複素 $s$ 平面において $\mathfrak{z}_k\,(k=1,2)$ を次のように定義する:

(i) $\mathfrak{z}_k$ は原点を出発点とし, $c_k$ を通る下 (上) 半面にある区分的に $C^1$ 級の曲線である．

(ii) 小正数 $\rho$ に対して原点を中心とする半径 $\rho$ の円盤 $\Gamma_\rho$ の外部では等式 $\Im f(s) = \pm 2\sqrt{x}$ を満たす．

(iii) $\Gamma_\rho \cap \mathfrak{z}_k$ はそれぞれ扇形領域 $-\frac{3}{4}\pi < \arg s < -\frac{\pi}{2};\ \frac{1}{2}\pi < \arg s < \frac{3\pi}{4}$ にある．

(iv) $\mathfrak{z}_k$ は $\sigma_k$ とツウィスト・サイクルとしてホモローグである: $\mathfrak{z}_k \sim \sigma_k/\sqrt{n}$ (図 14.3 を参照)．すなわち

$$\begin{aligned} y_k &= n^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\mathfrak{z}_k} e^{-\sqrt{n}s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}s}\right)^{-n-1}ds \\ &= n^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\mathfrak{z}_k} s^{\alpha-1}\exp\left[\sqrt{n}f(s)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right]\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{B_l}{n^{l/2}}\right)ds. \qquad (14.11)\end{aligned}$$

このとき $\mathfrak{z}_k$ は $\mathbf{C} - \Gamma_\rho$ では $\lambda = \sqrt{n}$ ととることにより付録 A6 の冒頭で述べた条件 $(\mathcal{H})$ を満たす．

さらにある正定数 $K, C_l$ が存在して

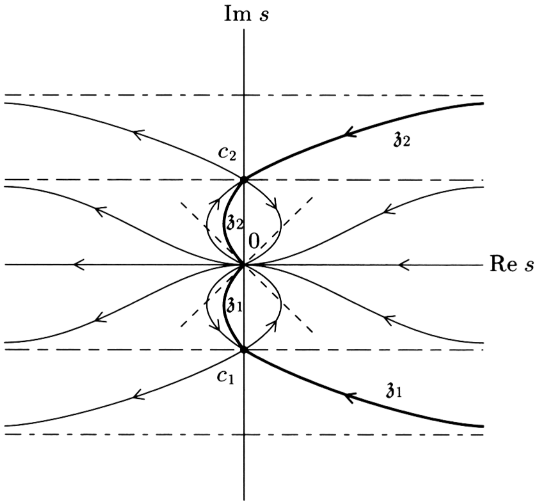



**図 14.3**

$$\left|\int_{\mathfrak{z}_k\cap\Gamma_\rho} s^{\alpha-1}\exp\left[\sqrt{n}f(s)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right]\left(\frac{x}{s}\right)^l ds\right| \leq C_l e^{-\sqrt{n}K}. \qquad (14.12)$$

**証明**. 実際その構成の仕方から $\mathfrak{z}_k\cap\Gamma_\rho$ では $\Re f(s)\leq -K$ ($K$ 正定数), $\Re s^{-2}$ $<0$ であって

$$\begin{aligned}(14.12)\ \text{の左辺} &\leq e^{-\sqrt{n}K}\left|\int_{\mathfrak{z}_k\cap\Gamma_\rho} s^{\alpha-1}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right]\left(\frac{x}{s}\right)^l ds\right| \\ &\leq C_l e^{-\sqrt{n}K}.\end{aligned}$$

□

$\mathfrak{z}_k$ において $\Re\left(\frac{x}{s}\right)^2$ が有界であるので，付録 A6 定理 A6.1 より次の命題を得る:

**命題 14.5**　$x>0, n\gg 1$ のとき

$$y_k \approx \sqrt{\pi}\,(nx)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{x}{2}}\exp\left[\pm 2i\sqrt{nx}\mp\frac{\pi i\alpha}{2}\pm\frac{\pi i}{4}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \qquad (14.13)$$

また (14.9) より

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} e^x x^{-\alpha}(y_1 - y_2). \tag{14.14}$$

一方 $\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)$ $(x > 0)$ は $x < 0$ の点から上半面を経由して解析的に延長したものとして定義する．このとき

$$\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) = -e^x x^{-\alpha} e^{\pi i\alpha} y_1. \tag{14.15}$$

命題 14.5 の帰結として，

**定理 14.6** $x > 0, n \gg 1$ のとき

(i) $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

(ii) $\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)$

$$\approx \sqrt{\pi}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \exp\left[2i\sqrt{nx} + \frac{\pi i\alpha}{2} - \frac{3\pi i}{4}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

次に $x < 0$ の場合を考察する．

$\sigma_x$ において $t^\alpha$ の分岐を $t^\alpha = (-t)^\alpha e^{-2\pi i\alpha}$ $(t < 0)$ ととる．上記と同じく変数変換 $t = \sqrt{n}s$ を行う．正数 $\delta$ に対して原点を中心とする半径 $\delta$ の (正の向きの) 円周 $\Gamma_\delta$ は $\sigma_x/\sqrt{n}$ を内部に含むものと仮定する．ツウィスト・サイクル $\sigma_1 = [0, \infty)$ および $\sigma_2 = \frac{1}{e^{2\pi i\alpha}-1}\Gamma_\delta + [\delta, \infty)$ に対して $y_k$ を (14.13) で定義する．定義から $\sigma_x = \sigma_1 - \sigma_2$. $\Re f(s)$ の停留点 $c_k$ はそれぞれ $\pm\sqrt{|x|}$, $f(c_k) = \mp 2\sqrt{|x|}, f''(c_k) = \mp 2\sqrt{|x|}$.

**補題 14.7** $\mathfrak{z}_1$ を補題 14.4 にならって次のように定義する:

(i) $\mathfrak{z}_1$ は原点を出発点とし, $c_1$ を通る第 1 象限あるいは正実軸にある区分的に $C^1$ 級の曲線である．

(ii) 小正数 $\rho$ に対し原点を中心とし，半径 $\rho$ の円盤を $\Gamma_\rho$ とする．$\Gamma_{2\delta} \cap \mathfrak{z}_1$ は扇形領域 $-\frac{\pi}{2} \le \arg s \le 0$ に含まれる．小円盤 $\Gamma_{2\delta}$ の外部では区間 $(2\delta, \infty)$ に一致する．

(iii) $\Gamma_\delta \cap \mathfrak{z}_1$ は扇形領域: $-\frac{\pi}{2} < \arg s < -\frac{\pi}{4}$ に含まれる．

(iv) $\mathfrak{z}_1$ はツウィスト・サイクルとしては $\sigma_1$ にホモローグである．

また $c_1, c_2$ を直径の端点とする円周: $\Im f(s) = \Im f(c_k)$ の上半面，下半面の部分をそれぞれ $\mathfrak{c}_\pm$ で表すときツウィスト・サイクル $\mathfrak{z}_2$ は

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{e^{2\pi i\alpha} - 1}(\mathfrak{c}_+ + \mathfrak{c}_-) + [c_1, \infty)$$

によって定義される．$\mathfrak{z}_2$ はツウィスト・サイクルとして $\sigma_2$ にホモローグである (図 14.4 を参照).

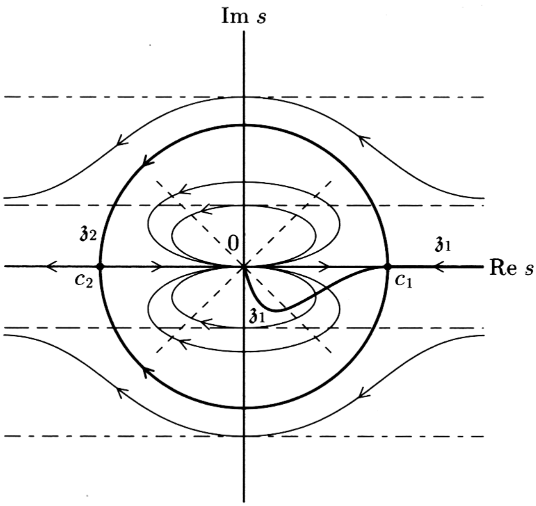



**図 14.4**

$y_k$ を (14.10) によって定義すれば等式 (14.11) が導かれ，命題 14.5 と同様にして次の命題を得る.

**命題 14.8**　$x < 0, n \gg 1$ に対して

$$y_1 \approx \sqrt{\pi}(n|x|)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \exp\left[-2\sqrt{n|x|} + \frac{1}{2}|x|\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$y_2 \approx \sqrt{\pi}(n|x|)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \exp\left[2\sqrt{n|x|} + \frac{1}{2}|x| + \pi i\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

$x^{-\alpha} = |x|^{-\alpha}e^{-\pi i\alpha}$ に注意して (14.14), (14.15) より次の命題を得る:

**命題 14.9** $x<0, n\gg 1$ のとき

$$\begin{aligned}L_n^{(\alpha)}(x) &\approx -\frac{1}{2\pi i}e^x x^{-\alpha}y_2\\ &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|x|^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\exp\left[2\sqrt{n|x|}+\frac{1}{2}x\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),\\ \tilde{L}_n^{(\alpha)}(x) &= -e^x|x|^{-\alpha}y_1\\ &\approx -\sqrt{\pi}\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}|x|^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\exp\left[-2\sqrt{n|x|}+\frac{1}{2}x\right]\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).\end{aligned}$$

## 14.3 Hermite 多項式の場合

始めに $x\in\mathbf{R}$ と仮定する.

Hermite 多項式 $H_n(x)$ は

$$\frac{(-1)^n}{n!}e^{-x^2}H_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_x}\Phi(t)dt,\quad \Phi(t)=\frac{e^{-t^2}}{(t-x)^{n+1}}$$

と表される (9.3 節参照). ここで $\sigma_x$ は $x$ を正の向きに一周する小円周を表す. 同じく Hermite 関数 $\tilde{H}_n(x)$ は

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}e^{-x^2}\tilde{H}_n(x)=\int_{\sigma_1}\Phi(t)dt=y_1\quad(\Im x\geq 0),$$

または

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}e^{-x^2}\tilde{H}_n(x)=\int_{\sigma_2}\Phi(t)dt=y_2\quad(\Im x\geq 0)$$

によって定義される. ここで $\sigma_k$ は $x$ を迂回する実軸 (detoured real axis)(ただし $\Gamma_\delta^{\pm}$ は $x$ を中心とする半径 $\delta$ の上 (下) 半円) を表す:

$$\sigma_1=(-\infty,x-\delta]+\Gamma_\delta^-+[x+\delta,\infty);$$

$$\sigma_2=(-\infty,x-\delta]+\Gamma_\delta^++[x+\delta,\infty).$$

ツウィスト・サイクルのホロジー類として $\sigma_x=\sigma_1-\sigma_2$ であるから

$$H_n(x)=\frac{1}{2\pi i}(y_1-y_2).$$

$y_k$ は変数変換 $t=\sqrt{n}\,s$ によって

$y_k =$

$$n^{-\frac{n}{2}} \int_{\sigma_k/\sqrt{n}} \exp\left[n\left(-s^2 - \log s + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{x}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{s}\right)^2\right] s^{-1}\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_l}{n^{l/2}}\right) ds.$$

いま $f(s) = -s^2 - \log s + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{x}{s}$ とおく．$f'(s) = 0$ を満たす停留点 $c_k$ は $\sqrt{n}$ に関する Laurent 展開として

$$c_k = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\left(1 \pm \frac{ix}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{3x^2}{4n} + \cdots\right)$$

で与えられるゆえ

$$c_k^{-n-1} = (\pm\sqrt{2}i)^{n+1} \exp\left[\mp\sqrt{n}\frac{ix}{\sqrt{2}} - x^2\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}c_k}\right)^{-n-1} = \exp[\pm i\sqrt{2n}x]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$\exp[-nc_k^2] = \exp\left[\frac{n}{2} \pm ix\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

ここで $f''(c_k) = -4 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ に注意する (相図 14.5 を参照).

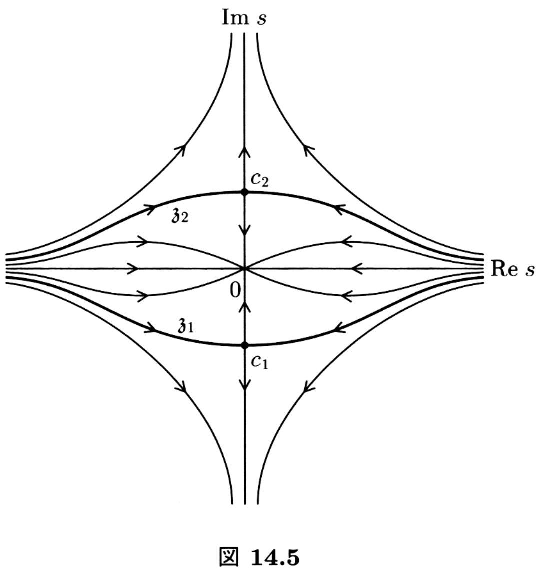



**図 14.5**

$\lambda = n$ とおいて付録 A6 定理 A6.1 を適用すれば,

**命題 14.10**

$$y_k \approx$$
$$\sqrt{\pi}\, n^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{n}{2} - \frac{x^2}{2} \pm i\sqrt{2n}x \pm \frac{\pi i(n+1)}{2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

こうして次の漸近展開を得る:

**定理 14.11** $n \gg 1$ のとき

$$\begin{aligned} &H_n(x) \\ &= (-1)^n e^{x^2} n! \cdot \frac{1}{2\pi i}(y_1 - y_2) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{n}{2} + \frac{x^2}{2}\right] \cos\left(\sqrt{2n}\, x - \frac{\pi n}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \\ &\tilde{H}_n(x) \\ &= (-1)^{n+1} n! e^{x^2} y_2 \\ &\approx \sqrt{\pi}\, n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \exp\left[-\frac{n}{2} + \frac{x^2}{2} - i\sqrt{2n}\, x + \frac{\pi i(n+1)}{2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

**注意 14.1** じつは定理 14.11 に与えられた漸近表示は $x \in \mathbf{C}$ 全域で成り立つ.

**注意 14.2** $[-1,1]$ 上の重み関数 $w(x)$ がある程度のなめらかさを有するときに $p_n(x)$ の $n \to \infty$ に対する漸近的な振る舞いを与える G.Szegö の極限定理が知られている. それによると $p_n(x)$ の漸近的な振る舞いの主要項は

$$\left(\sqrt{(1-x^2)}w(x)\right)^{\frac{1}{2}} p_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(n\theta + g(\theta)) + O\{(\log n)^{-\lambda}\}$$
$$(x = \cos\theta)$$

の表示をしている. ただし $\lambda$ は適当な正数, $g(\theta)$ は単位円周上の実関数である (文献 [Sz]§12 参照). 第 14 章で記述する周期 Jacobi 行列の場合にも $e^{i\theta}$ を適当な $x$ の関数 $h(x)$ にとることにより $p_n(x)$ の漸近挙動は $\theta$ の比較的単純な周期関数によって表示されている. このような事実は少なくとも有限区間上の重み関数の場合には普遍的な事実なのかも知れない.

第 15 章

# 周期 Jacobi 行列の場合

周期 $N$ の実対称 Jacobi 行列は有界な自己共役作用素を定義する．この章では対応する Stieltjes 測度 (重み関数) の台は一般に $N$ 個の帯 (閉区間) と高々 $N-1$ 個の点からなることを示し，この測度の台が帯のみをもつ場合の特徴づけを行う．

## 15.1　周期的 Jacobi 行列と超楕円曲線

(文献 [Ka], [Mo], [Te], [To] 参照).

**定義 15.1**　正整数 $N \geq 2$ を固定する．対称 Jacobi 行列 $A$ が条件

$$a_n = a_{n+N},\ b_n = b_{n+N} \quad (n \geq 0)$$

を満たすとき $A$ は周期 $N$ の対称 Jacobi 行列であるという．

以下 $A$ において $b_n > 0$ $(n \geq 0)$ を仮定する．
まず次のように $N$ 次多項式 $\Phi(z)$ および 2 次無理式 $h(z)$ を定義する:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= (-1)^N\{\Delta^{(0,N-1)}(z) - b_{N-1}^2\Delta^{(1,N-2)}(z)\}\\ &= z^N + \gamma_1 z^{N-1} + \gamma_2 z^{N-2}\cdots + \gamma_N,\end{aligned} \tag{15.1}$$

$$\gamma_1 = -\sum_{k=0}^{N-1} a_k, \qquad \gamma_2 = \sum_{0\leq j<k\leq N-1} a_j a_k - \sum_{k=0}^{N-1} b_k^2. \tag{15.2}$$

$$h(z) = \frac{\Phi(z) - \sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{2\beta} = \beta z^{-N} + 0\left(z^{-N-1}\right) \qquad (|z| \gg 1). \tag{15.3}$$

ただし $\beta = b_0 b_1 \cdots b_{N-1}$. $h = h(z)$ は方程式

$$\beta(h+h^{-1})-\Phi(z)=0 \tag{15.4}$$

の解である.

**命題 15.2** $h(z), h(z)^{-1}$ は種数 (genus) $N-1$ の超楕円曲線

$$y=\sqrt{\Phi(z)^2-4\beta^2}$$

上に定義される $z=\infty$ でのみ $N$ 位の零点および極をもつ有理型関数すなわち 2 次の代数整関数である (文献 [Kl], [Ko] 参照). さらに次を仮定する:

$$\Phi(z)-2\beta=\prod_{k=1}^{N}(z-\xi_k), \tag{15.5}$$

$$\Phi(z)+2\beta=\prod_{k=1}^{N}(z-\xi'_k). \tag{15.6}$$

とおくとき $\xi_k, \xi'_j$ は互いに相異なる実数であってそれぞれ小さい順に番号づけがなされているものと仮定する. このとき $\xi_k<\xi'_{k+1}, \xi'_k<\xi_{k+1}$ であってかつ

$$(-1)^{N-k}(\xi_k-\xi'_k)>0$$

が成り立つ. すなわち閉区間 (帯 (band) ともいう) $I_k\ (1\leq k\leq N)$ :

$$I_{N-2j+2}=[\xi'_{N-2j+2}, \xi_{N-2j+2}],$$
$$I_{N-2j+1}=[\xi_{N-2j+1}, \xi'_{N-2j+1}] \quad \left(1\leq j\leq\left[\frac{N}{2}\right]\right)$$

は互いに無縁 (disjoint) である.

**注意 15.1** 定義から明らかに基本対称式に関する次の等式が成り立つ:

$$\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq N}\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r}=\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_r\leq N}\xi'_{k_1}\cdots\xi'_{k_r} \quad (1\leq r\leq N-1), \tag{15.7}$$

$$(-1)^{N-1}\{\xi_1\cdots\xi_N-\xi'_1\cdots\xi'_N\}=4\beta. \tag{15.8}$$

以上のもとに Green 関数 $G(0,0|z), G(0,N-1|z)$ について次の命題が成り立つ.

**命題 15.3**　$G(0,0|z), G(0,N-1|z)$ は (超楕円曲線に付随する) 2 次の代数関数であってそれぞれ明示的に

$$G(0,0|z) = \frac{(-1)^{N-1} b_0 b_1 \cdots b_{N-2} h(z) - b_{N-1} \Delta^{(1,N-2)}(z)}{b_{N-1} \Delta^{(0,N-2)}(z)}, \tag{15.9}$$

$$G(0,N-1|z) = \frac{h(z)}{b_{N-1}} \tag{15.10}$$

と表される.

補題 13.3, 補題 13.4 に述べた等式

$$p_{N-1}(z) = (-1)^{N-1} \frac{\Delta^{(0,N-2)}(z)}{b_0 b_1 \cdots b_{N-2}}, \tag{15.11}$$

$$q_{N-1}(z) = (-1)^{N-2} \frac{\Delta^{(1,N-2)}(z)}{b_0 b_1 \cdots b_{N-2}} \tag{15.12}$$

を使えば (15.9),(15.10) は $N-1$ 次の Padé 近似の等式

$$G(0,0|z) - \frac{q_{N-1}(z)}{p_{N-1}(z)} = \frac{h(z)}{b_{N-1} p_{N-1}(z)} = O(z^{-2N+1}) \tag{15.13}$$

を与える.

**補題 15.4**　$p_{N-1}(z)$ の零点はすべて実数であるが，それを小さい順に $\eta_1, \cdots, \eta_{N-1}$ で表すとき $\{\eta_1, \cdots, \eta_{N-1}\}$ は $\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ とは無縁であってこれら 2 集合は互いに他を分離する.

**注意 15.2**　一般には $G(0,0|z)$ は $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ において $z = \eta_k$ で極をもつ.

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N-1}$ は行列 $A$ の補助スペクトル (auxiliary spectrum) ということがある．$p_{N-1}(x)$ の零点 $\eta_k$ 対する Christoffel 数を $\kappa_k$ とおくとき (命題 7.6 参照)，(15.9) からわかるように $G(0,0|z)$ が $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ で極をもたないための必要十分条件は等式

$$\kappa_j + \frac{\beta\, h(\eta_j)}{b_{N-1}^2 \prod_{l \neq j} (\eta_j - \eta_l)} = 0 \quad (1 \leq j \leq N-1) \tag{15.14}$$

を満たすことである．Jacobi 行列の行列式に関する Jacobi の恒等式によりつ

ねに

$$\left(\kappa_j + \frac{\beta\, h(\eta_j)}{b_{N-1}^2 \prod_{l\neq j}(\eta_j - \eta_l)}\right)\left(\kappa_j + \frac{\beta\, h^{-1}(\eta_j)}{b_{N-1}^2 \prod_{l\neq j}(\eta_j - \eta_l)}\right) = 0$$

であるが，$|h(z)| < 1\,(z \in \mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k)$ なので (15.14) はまた次の条件と同値である:

$$\kappa_j < \frac{\beta}{b_{N-1}^2 \prod_{l\neq j}|\eta_l - \eta_j|} \quad (1 \leq k \leq N-1). \tag{15.15}$$

**定理 15.5** $G(0,0|z)$ は $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ において極をもたないならば，次の形に積分表示される:

$$G(0,0|z) = \frac{1}{2\pi b_{N-1}^2}\sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}\frac{\sqrt{|\Phi(x)^2 - 4\beta^2|}}{(z-x)\prod_{j=1}^{N-1}|x-\eta_j|}dx, \tag{15.16}$$

ここで等式

$$2\pi b_{N-1}^2 = \sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}\frac{\sqrt{|\Phi(x)^2 - 4\beta^2|}}{\prod_{j=1}^{N-1}|x-\eta_j|}dx \tag{15.17}$$

が成り立つ．

**証明.** 実際 $G(0,0|z)$ は $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ で正則であって $z=\infty$ における Laurent 展開を

$$G(0,0|z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^{n+1}}. \tag{15.18}$$

とする．$\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ を正の向きに一周する閉道 (loop) $\sigma_0$ をとるとき Cauchy の定理により

$$G(0,0|z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0}\frac{G(0,0|x)}{z-x}dx \quad (|z| \gg 1) \tag{15.19}$$

が成り立つ．$G(0,0|z)$ は $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ で一価正則なるゆえ，(15.19) の右辺と表

示 (15.9) を用い，かつ $I_k$ に沿って $G(0,0|z)$ の多価性を考慮して (15.16) が導かれる．(15.17) は (15.18) からの帰結である． □

## 15.2　点スペクトルのない密度関数

逆に $N$ 次多項式 $\Phi(z)$, 正数 $\beta$ および集合 $\{\eta_1,\cdots,\eta_{N-1}\}$ が命題 15.2 および補題 15.4 を満たし，かつ (15.5), (15.6) を満たすものとする．さらに $\Phi(z)$ は

$$\Phi(z) = z^N + \gamma_1 z^{N-1} + \gamma_2 z^{N-2} + \cdots + \gamma_N \quad (\gamma_k \in \mathbf{R}) \tag{15.20}$$

と表示されるものとする．

$\chi_{I_j}(x)$ は区間 $I_j$ の特性関数を表すものとすれば点スペクトルのない Stieltjes 測度

$$d\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\sqrt{|\Phi(z)^2 - 4\beta^2|}}{\prod_{k=1}^{N-1}|x-\eta_k|}\chi_{I_j}(x)dx$$

の Stieltjes 変換

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{\rho}(x)}{z-x} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \cdots \quad (z \gg 1)$$

に関して次が成り立つ．

**補題 15.6**　$F(z)$ は $\mathbf{C} - \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ で一価正則である．そして

$$F(z) = z + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\alpha_j}{z-\eta_j} - \frac{\sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{\prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)}. \tag{15.21}$$

ただし $\sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}$ は $z \gg 1$ のとき正値となるように分岐 (branch) をとっている．さらに

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{\Phi(\eta_j)^2 - 4\beta^2}}{\prod_{l=1, l\neq j}^{N-1}(\eta_j - \eta_l)}, \qquad \alpha_0 = \gamma_1 + \sum_{j=1}^{N-1}\eta_j. \tag{15.22}$$

であって $(-1)^{N-j}\sqrt{\Phi(\eta_j)^2 - 4\beta^2} > 0$ が成り立つ．

**証明.** 実際，複素平面内で $\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$ を正の向きに一周する閉道 (loop) $\sigma_0$ をとるとき

$$\int_{\sigma_0} \frac{\sqrt{\Phi(x)^2 - 4\beta^2}}{(z-x)\prod_{j=1}^{N-1}(x-\eta_j)}dx = -2i\sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}\frac{d\tilde{\rho}(x)}{z-x} + 2\pi i\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\alpha_j}{z-\eta_j}. \tag{15.23}$$

さらに $|z| \gg 1$ に対して $R > |z|$ を満たす正の向きをもつ大きな円周 $\sigma_\infty : |x| = R$ をとるとき，

$$\begin{aligned}&\int_{\sigma_\infty} \frac{\sqrt{\Phi(x)^2 - 4\beta^2}}{(z-x)\prod_{j=1}^{N-1}(x-\eta_j)}dx \\ &= \int_{\sigma_0} \frac{\sqrt{\Phi(x)^2 - 4\beta^2}}{(z-x)\prod_{j=1}^{N-1}(x-\eta_j)}dx - 2\pi i\frac{\sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{\prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)}.\end{aligned} \tag{15.24}$$

(15.24) の左辺の被積分関数を $x = \infty$ において Laurent 展開して留数計算 (residue calculus) を施せば

$$左辺 = -2\pi i(z+\alpha_0).$$

ゆえに

$$\int_{\sigma_0} \frac{\sqrt{\Phi(x)^2 - 4\beta^2}}{(z-x)\prod_{j=1}^{N-1}(x-\eta_j)}dx = -2\pi i(z+\alpha_0) + 2\pi i\frac{\sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{\prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)}. \tag{15.25}$$

(15.23),(15.25) より補題 15.6 が得られる. □

ところで $z = \infty$ での Laurent 展開

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{\prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)} &= z + \gamma_1 + \sum_{j=1}^{N-1}\eta_j \\ &\quad + \frac{1}{z}\left(\gamma_2 + \gamma_1\sum_{j=1}^{N-1}\eta_j + \sum_{j=1}^{N-1}\eta_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N-1}\eta_j\eta_k\right) + O(z^{-2})\end{aligned}$$

に注意すれば (15.21) から等式

$$\alpha_0 - \gamma_1 - \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j = 0 \tag{15.26}$$

が成り立ち，さらに

$$c_0 = -\left(\gamma_2 + \gamma_1 \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j + \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j^2 + \sum_{1\le j<k\le N-1} \eta_j\eta_k\right) + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j$$

とおけば

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\rho}(x)}{z-x} = \frac{1}{z}c_0 + O(z^{-2}).$$

補題 15.6 の帰結として等式

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\rho}(x)$$

が得られる．

さて Stieltjes 測度 $d\rho(x) = \frac{1}{c_0} d\tilde{\rho}(x)$ をとるとき次の定理が成り立つ．

**定理 15.7**　$G(0,0|z) = \frac{1}{c_0}F(z)$ の Laurent 展開

$$G(0,0|z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(x)}{z-x} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{c_0} \frac{1}{z^{n+1}} \tag{15.27}$$

は非退化であってその Padé 近似から得られる Jacobi 行列 $A$ は周期 $N$ の周期性をもつ．そして $G(0,0|z)$ は (15.9) で，$G(0,N-1|z)$ は (15.10) で与えられる．

**証明**　$\Phi(z), \beta, \eta_1, \cdots, \eta_{N-1}$ に対して等式 (15.1), (15.2), (15.3), (15.9), (15.10) を満たすように $a_0, a_1, \cdots a_{N-1}; b_0, b_1, \cdots, b_{N-1}$ を見つければよい．まず

$$2b_{N-1}^2 = c_0 \quad (b_{N-1} > 0), \tag{15.28}$$

$$\tilde{p}_{N-1}(z) = \frac{b_{N-1}}{\beta} \prod_{j=1}^{N-1} (z-\eta_j) = \frac{b_{N-1}}{\beta} z^{N-1} + \cdots \tag{15.29}$$

とおく．(15.26) より

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{N-1} (z-\eta_j) \left\{ z + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{z-\eta_j} \right\}$$

$$= z^N + \left(\alpha_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j\right) z^{N-1} + \cdots$$
$$= z^N + \gamma_1 z^{N-1} + O(z^{N-2}).$$

また (15.20) より $\Phi(z) = z^N + \gamma_1 z^{N-1} + O\left(z^{N-2}\right)$ であるから

$$\deg\left(\varphi(z) - \Phi(z)\right) \leq N - 2.$$

等式 (15.21) より

$$G(0,0|z) = \frac{F(z)}{c_0} = \frac{\varphi(z) - \sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{2b_{N-1}^2 \prod_{k=1}^{N-1}(z - \eta_k)}$$
$$= \frac{\varphi(z) - \Phi(z) + \Phi(z) - \sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{2b_{N-1}^2 \prod_{k=1}^{N-1}(z - \eta_k)}$$
$$= \frac{\varphi(z) - \Phi(z)}{2\beta b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z)} + \frac{h(z)}{b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z)}. \tag{15.30}$$

さて右辺第 1 項は分母が $N-1$ 次式 $\tilde{p}_{N-1}(z)$, 分子が $N-2$ 次式である. また $h(z) = O\left(z^{-N}\right)$ であるから

$$\frac{h(z)}{b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z)} = O\left(z^{-2N+1}\right).$$

すなわち有理式 $\dfrac{\varphi(z) - \Phi(z)}{2\beta b_{N-1} p_{N-1}(z)}$ は $G(0,0|z)$ の $(N-1)$ 次 Padé 近似である. このような多項式

$$P_{N-1}(z) = 2\beta b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z),\ Q_{N-1}(z) = \varphi(z) - \Phi(z)$$

の対はスカラー倍を除いて一意的に決まり, $P_{N-1}(x)$ は密度 $d\rho(x)$ に関する $(N-1)$ 次直交多項式に等しい (命題 11.4). ゆえに Jacobi-Perron のアルゴリズムの一意性により $a_0, a_1, \cdots, a_{N-2}, b_0 > 0, b_1 > 0, \cdots, b_{N-3} > 0$ が一意的に定まって

$$-\frac{\Delta^{(1,N-2)}(z)}{\Delta^{(0,N-2)}(z)} = \frac{\varphi(z) - \Phi(z)}{(-1)^{N-1} 2b_{N-1}^2 \Delta^{(0,N-2)}(z)},$$

すなわち,

$$\varphi(z) - \Phi(z) = (-1)^N 2b_{N-1}^2 \Delta^{(1,N-2)}(z). \tag{15.31}$$

また (15.30) より，等式

$$P_{N-1}(z) = (-1)^{N-1} 2b_{N-1}^2 \Delta^{(0,N-2)}(z)$$

が得られる．

**補題 15.8**　等式

$$\beta = b_0 b_1 \cdots b_{N-1} \tag{15.32}$$

が成り立つ．

**証明**. (15.30) の右辺第 2 項は $N-1$ 次直交多項式による Padé 近似の剰余項を表し，その表示の一意性により $(N-1)$ 次正規直交多項式 $p_{N-1}(z) = k_{N-1}z^{N-1} + \cdots$ $(k_{N-1} > 0)$ を用いた等式

$$\frac{h(z)}{b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z)} = \frac{G(0, N-1|z)}{p_{N-1}(z)}$$

を得る ((13.17) 参照)．ところが $|z| \gg 1$ のとき，

$$\frac{h(z)}{b_{N-1}\tilde{p}_{N-1}(z)} \approx \frac{\beta^2}{b_{N-1}^2} z^{-2N+1},$$

$$\begin{aligned} G(0, N-1|z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{N-1}(z)}{z-x} d\rho(x) \\ &\approx z^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} x^{N-1} p_{N-1}(x) d\rho(x) = k_{N-1}^{-1} z^{-N}, \end{aligned}$$

$$p_{N-1}(z) \approx k_{N-1} z^{N-1} \quad (k_{N-1} = b_0^{-1} \cdots b_{N-2}^{-1})$$

であるから等式 (15.32) が導かれる．□

補題 15.8 より $\tilde{p}_{N-1}(z) = p_{N-1}(z)$ である．ゆえに等式 (15.10), (15.11), (15.12), (15.13) がいえる．

次に $N$ 次 Padé 近似を考える．

**補題 15.9**　等式

$$h(z)G(0,0|z) = \tilde{p}_N(z)G(0,0|z) - \tilde{q}_N(z) \tag{15.33}$$

を満たす Padé 近似の対 $N$ 次多項式 $\tilde{p}_N(z)$ と $(N-1)$ 次多項式 $\tilde{q}_N(z)$ が存在する．しかもそれらはスカラー倍を除いてただ 1 通りである．

**証明.**

$$2\beta\tilde{p}_N(z) = \varphi(z) + \Phi(z) \tag{15.34}$$

とおく．このとき (15.30) より

$$\begin{aligned}
&(\tilde{p}_N(z) - h(z))G(0,0|z) \\
&= \frac{\varphi(z) + \sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{2\beta} \cdot \frac{\varphi(z) - \sqrt{\Phi(z)^2 - 4\beta^2}}{2b_{N-1}^2 \prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)} \\
&= \frac{\varphi^2(z) + 4\beta^2 - \Phi(z)^2}{4\beta b_{N-1}^2 \prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)}
\end{aligned} \tag{15.35}$$

である．ところが $\deg\{(\varphi^2 - \Phi^2)\} = \deg\{(\varphi - \Phi)(\varphi + \Phi)\} = 2N-2$ であるから (15.34) の右辺の分子は $(2N-2)$ 次の多項式である．右辺の分子は $z = \eta_k$ で零であった．ゆえに $\prod_{j=1}^{N-1}(z-\eta_j)$ で割り切れる．すなわち (15.33) を満たす $(N-1)$ 次多項式 $\tilde{q}_N(z) = \frac{1}{\beta}z^{N-1} + \cdots$ が存在する．

(15.33) の左辺は $0\,(z^{-N-1})$ であるから右辺は $G(0,0|z)$ の $N$ 次 Padé 近似を与えている．Padé 近似の一意性によりこのような多項式 $\tilde{p}_N(z), \tilde{q}_N(z)$ はスカラー倍を除いて一意的である． □

**[定理 15.7] の証明の完結.**

$\tilde{p}_N(z)$ は $N$ 次直交多項式であって

$$\frac{\tilde{q}_N(z)}{\tilde{p}_N(z)} = \frac{1}{|z-a_0} - \frac{b_0^2}{|z-a_1} - \cdots - \frac{b_{N-2}^2}{|z-a_{N-1}} \tag{15.36}$$

が成り立つ．$\tilde{p}_N(z) = \frac{1}{\beta}z^N + \cdots$ に注意すれば $\tilde{p}_N(z)$ は $N$ 次正規直交多項式 $p_N(z)$ に等しい:

$$\tilde{p}_N(z) = p_N(z) = \frac{(-1)^N}{\beta}\Delta^{(0,N-1)}(z). \tag{15.37}$$

さらに

$$\tilde{q}_N(z) = q_N(z) = \frac{(-1)^{N-1}}{\beta}\Delta^{(1,N-1)}(z),$$

$$G(0,N|z) = G(0,0|z)h(z).$$

(補題 13.3–13.4). このとき (15.31), (15.34), (15.37) より

$$\Phi(z) = (-1)^N\{\Delta^{(0,N-1)}(z) - b_{N-1}^2\Delta^{(1,N-2)}(z)\}.$$

こうして等式 (15.1), (15.2), (15.3), (15.9) が示された. その結果 $n = m + \nu N$ $(0 \le m \le N-1; \nu = 0,1,2,\cdots)$ に対して $a_n = a_m, b_n = b_m$ となるように周期 $N$ の対称 Jacobi 行列 $A$ を定義すれば Green 関数 $G(0,0|z)$ は $A$ の Green 関数 (15.9) に一致する. こうして定理 15.7 が証明された. □

**問 15.1** 一般に等式

$$G(0,n+N|z) = h(z)G(0,n|z) \quad (n \ge 0)$$

が成り立つことを示せ.

**例 15.1** 特に $N=2$ で $a_0 = a_1 = 0$ の場合を考察する. さらに $b_0 > b_1 > 0$ を仮定する. 変数変換 $x = (b_0 - b_1)t$, $z = (b_0 - b_1)Z$ により $w(x)$, $h(z)$, $G(0,0|z)$, $G(0,1|z)$ はそれぞれ

$$w(x)dx = \frac{2k\sqrt{|(1-x^2)(1-k^2x^2)|}}{\pi(1-k)^2 t}dx \quad \left(1 < |x| < \frac{1}{k}\right),$$

$$h(z) = \frac{2k^2Z^2 - (1+k^2) - 2k\sqrt{(Z^2-1)(k^2Z^2-1)}}{1-k^2} \quad (Z \in \mathbf{C} - I_1 \sqcup I_2),$$

$$G(0,0|z) = \frac{1-k+(1+k)h(z)}{(1-k)z}, \quad G(0,1|z) = \frac{h(z)}{b_1}.$$

ただし $k = \dfrac{b_0 - b_1}{b_0 + b_1}$ $\left(h(0) = -\dfrac{1-k}{1+k}\text{ に注意}\right)$. $Z$ を第 1 種楕円積分

$$u = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}},$$

すなわち Jacobi の楕円関数 $Z = sn(u,k)$ によって表し, その周期積分 (period integral) を

$$K = \int_0^1 \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-k^2Z^2)}}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z^2-1)(1-k^2Z^2)}}$$

とおく．$Z=0$ が $u=0$, $Z=\infty$ が $u=\pm(2K-2iK')$ に対応するので $h(z)$, $G(0,0|z)$ は周期 $4K$, $4iK'$ に付随する複素 1 次元トーラス$\mathbf{T}=\mathbf{C}/\langle 4K, 4iK'\rangle$ 上の $\sigma$ (シグマ)–関数

$$\sigma(u) = u \prod_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2-\{(0,0)\}} \left\{\left(1-\frac{u}{\omega_{m,n}}\right)\exp\left[\frac{u}{\omega_{m,n}}+\frac{u^2}{2\omega_{m,n}^2}\right]\right\}$$

$$(\omega_{m,n} = 4mK + 4niK')$$

を用いて次の無限積表示が得られる (文献 [EMOT], [WW] 参照):

$$h(z) = -\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{\sigma^2(2K-2iK')}{\sigma^2(2iK')}\cdot\frac{\sigma(u-2iK')\sigma(u+2iK')}{\sigma(u+2K-2iK')\sigma(u-2K+2iK')},$$

$$G(0,0|z) = \frac{1}{b_0+b_1}\frac{\sigma(2iK'-2K)\sigma(2K)}{\sigma(2iK')}\cdot\frac{\sigma(u)\sigma(u-2iK')}{\sigma(u-2K)\sigma(u+2K-2iK')},$$

$$G(0,2m|z) = G(0,0|z)h^m(z),$$

$$G(0,2m+1|z) = \frac{h^{m+1}(z)}{b_1}.$$

また正規直交多項式 $p_n(x)$ は (13.17) により

$$p_{2m}(x) = \frac{b_1}{b_0}U_{m-1}(\cos\theta) + U_m(\cos\theta),$$

$$p_{2m+1}(x) = \frac{xU_m(\cos\theta)}{b_0} \quad (m \geq 0)$$

で与えられる．ただし $\theta$ は $e^{i\theta} = h(x)$ すなわち $\cos\theta = \dfrac{x^2-b_0^2-b_1^2}{2b_0b_1}$ によって定義する．ここで $U_n(x)$ は $n$ 次の第 2 種 Chebyshev 多項式である．$p_{2m}(x), p_{2m+1}(x)$ の零点は開区間 $(-\frac{1}{k}, -1), (1, \frac{1}{k})$ にそれぞれ $m$ 個，さらに 0 は $p_{2m+1}(x)$ の零点である．

# 第 16 章

# Askey-Wilson 多項式

16.1 節において直交多項式としての Askey-Wilson 多項式を定義し，これが 3 項漸化式および $z$ ($x = \frac{z+z^{-1}}{2}$) に関して $q$-超幾何関数に付随する 2 階の $q$-差分方程式を満たすことを示す．16.2 節においてその Stieltjes 変換がそれと同値な方程式を満たすことを示す．同時に Askey-Wilson 多項式のノルムを与える Askey-Wilson の公式を証明する (文献 [Is2] 参照).

## 16.1 Askey-Wilson 多項式

Askey-Wilson 多項式は超幾何関数の $q$-類似を用いて定義される．$q$ を $0 < q < 1$ を満たす正定数とし

$$(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i), \quad (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とおく．いま 2 個ずつが互いに複素共役であるような 4 個のパラメータ $a_1, a_2, a_3, a_4$ ($a_k \in \mathbf{C}, |a_k| \neq 1$) をとる．$x = \cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおき，$a_1, a_2, a_3, a_4$ に依存する区間 $(-1,1)$ 上の密度 $d\rho(x) = w(x)dx$ に関する直交多項式を Askey-Wilson 多項式という．ただし

$$w(x) = \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty (e^{-2i\theta};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{4}(a_k e^{i\theta};q)_\infty (a_k e^{-i\theta};q)_\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

とする．ちなみに $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = \sqrt{q}, a_4 = -\sqrt{q}$ のとき第 1 種 Chebyshev 多項式，$a_1 = q, a_2 = -q, a_3 = \sqrt{q}, a_4 = -\sqrt{q}$ のとき第 2 種 Chebyshev 多項式である．

$z = e^{i\theta}$, すなわち, $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ とすると，Askey-Wilson 多項式 $P_n(x)$ は $q$ を

底とする $q$-超幾何関数

$$
{}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} c_1, c_2, c_3, c_4 \\ c_1', c_2', c_3' \end{matrix}; t|q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{4}(c_k; q)_n}{(q;q)_n \prod_{k=1}^{3}(c_k'; q)_n} t^n \quad (|t| < 1)
$$

を用いて次のように表すことができる:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x; a_1, a_2, a_3, a_4|q) \\
&= a_1^{-n}(a_1a_2; q)_n\,(a_1a_3; q)_n\,(a_1a_4; q)_n\,{}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1+\delta}, a_1z, a_1z^{-1} \\ a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 \end{matrix}; q|q\right).
\end{aligned} \tag{16.1}
$$

ここで $q^\delta = a_1a_2a_3a_4$ である．$P_n(x)$ は $x$ に関して $n$ 次の多項式であり，最高次の係数は $2^n(q^{n-1+\delta}; q)_n$ となる．たとえば

$$
P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2(1 - q^\delta)x + \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \cdots
$$

ただし $\varepsilon_k$ $(1 \le k \le 4)$ は $a_1, a_2, a_3, a_4$ の $k$ 次基本対称式を表す．$P_n(x)$ が実際に直交多項式であることは 16.1 節の最後に述べて 16.2 節の最後でその証明を与える．

$P_n(x)$ の満たす 3 項漸化式は次のように表示される:

**命題 16.1** $2xP_n(x) = \tilde{b}_{n-1}P_{n-1}(x) + \tilde{a}_nP_n(x) + \tilde{b}_n'P_{n+1}(x).$ (16.2)

ここで $\tilde{a}_n, \tilde{b}_{n-1}, \tilde{b}_{n-1}'$ は $a_1, a_2, a_3, a_4$ に関して対称である:

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_n &= q^{n-1}\frac{(1 + q^{\delta+2n-1})(\varepsilon_1 q + \varepsilon_3) - q^{n-1+\delta}(1+q)(\varepsilon_1 + q^{1-\delta}\varepsilon_3)}{(1 - q^{\delta+2n-2})(1 - q^{\delta+2n})}, \\
\tilde{b}_{n-1} &= \frac{(1 - q^n)\prod_{1\le i<j\le 4}(1 - a_ia_jq^{n-1})}{(1 - q^{\delta+2n-2})(1 - q^{\delta+2n-1})}, \\
\tilde{b}_n' &= \frac{1 - q^{\delta+n-1}}{(1 - q^{\delta+2n-1})(1 - q^{\delta+2n})}.
\end{aligned}
$$

**注意 16.1** 命題 16.1 から漸化的にわかるように $P_n(x)$ は $a_1, a_2, a_3, a_4$ に関して対称である．

さらに $P_n(x)$ の表示 (16.1) において $x=\frac{z+z^{-1}}{2}$ $(z\in\mathbf{C}^*)$ として考えると，

**命題 16.2**　$u(z)=P_n\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2};a_1,a_2,a_3,a_4|q\right)$ とおくとき，$u(z)$ は $z$ に関して $q$-差分作用素

$$L_z f(z)=\tilde{A}(z)\{f(qz)-f(z)\}+\tilde{A}(z^{-1})\{f(q^{-1}z)-f(z)\}$$

を用いた $q$-差分方程式

$$\{L_z-E_n\}u(z)=0 \tag{16.3}$$

を満たす．ここで $\tilde{A}(z),E_n$ はそれぞれ

$$\tilde{A}(z)=\frac{\prod_{k=1}^{4}(1-a_kz)}{(1-z^2)(1-qz^2)},$$
$$E_n=(q^{-n}-1)(1-q^{n-1+\delta})$$

によって与えられる．

命題 16.1–16.2 を証明する前に，Askey-Wilson 多項式が満たす方程式 (16.2), (16.3) が内包する双対性 (duality) について述べておく．

$$v_n(z)={}_4\varphi_3\left(\begin{matrix}q^{-n},q^{n-1+\delta},a_1z,a_1z^{-1}\\a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4\end{matrix};q|q\right) \tag{16.4}$$

とおけば，

$$P_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2};a_1,a_2,a_3,a_4|q\right)$$
$$=a_1^{-n}(a_1a_2;q)_n\,(a_1a_3;q)_n\,(a_1a_4;q)_n\,v_n(z)$$

であることから，$v_n(z)$ も命題 16.2 と同じ $q$-差分方程式

$$\{L_z-E_n\}\,v_n(z)=0 \tag{16.5}$$

を満たすことがわかる．一方，表示 (16.4) から $v_n(z)$ はパラメータの対合 (involution)

$$\iota : \left\{ \begin{array}{l} q^{\tilde{n}} = a_1^{-1} z^{-1}, q^{\tilde{\delta}} = q a_1^2, \tilde{z} = q^{\frac{1-\delta}{2} - n}, \tilde{a}_1 = q^{\frac{-1+\delta}{2}}, \\ \qquad \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = a_1 a_2, \tilde{a}_1 \tilde{a}_3 = a_1 a_3, \tilde{a}_1 \tilde{a}_4 = a_1 a_4 \end{array} \right.$$

に関して対称である ($q$-ずらし $z \to q^{\pm 1} z$ には $\tilde{n} \to \tilde{n} \mp 1$ が対応する). したがって, 方程式 (16.5) に対して対合 $\iota$ を考える (つまり $n, \delta, z, a_k$ をそれぞれ $\tilde{n}, \tilde{\delta}, \tilde{z}, \tilde{a}_k$ に置き換える) ことにより, ただちに $v_n(z)$ は 3 項漸化式

$$\begin{aligned} &(1 - a_1 z^{-1})(a_1 z - 1)\, v_n(z) \\ &= \frac{(1 - q^{\delta+n-1}) \prod_{k=2}^{4} (1 - a_1 a_k q^n)}{(1 - q^{\delta+2n-1})(1 - q^{\delta+2n})} (v_{n+1}(z) - v_n(z)) \\ &\quad + \frac{(1 - q^{-n}) \prod_{k=2}^{4} (1 - a_1 a_k q^{1-\delta-n})}{(1 - q^{1-\delta-2n})(1 - q^{2-\delta-2n})} (v_{n-1}(z) - v_n(z)) \end{aligned} \tag{16.6}$$

を満たすことがわかる. この漸化式は命題 16.1 の 3 項漸化式 (16.2) と一致する. したがって, 方程式 (16.5), (16.6) の対合 $\iota$ に関する対称性が Askey-Wilson 多項式が内包する双対性を表している. このような双対性は 1 変数のみならず多変数の特殊直交多項式にもしばしば見られる興味ある対称性である (文献 [Di1], [OS2] 参照).

**問 16.1** 漸化式 (16.2) と (16.6) が同等であることを証明せよ.

さて以上のことから, 命題 16.1-16.2 を証明する代わりに, $v_n(z)$ が満たす方程式 (16.5), (16.6) を証明する. そのためにいくつかの補題を用意する.

まず $z \in \mathbf{C}^*$ とし $s \in \mathbf{R}$ を任意に固定し, $\mathbf{C}^*$ 上の $q$-乗法関数 ($q$-multiplicative)

$$\Phi(t) = \gamma_s \frac{(a_1 a_2 t; q)_\infty (a_1 a_3 t; q)_\infty (a_1 a_4 t; q)_\infty (qt; q)_\infty}{(q^{-s} t; q)_\infty (q^{s-1+\delta} t; q)_\infty (a_1 z t; q)_\infty (a_1 z^{-1} t; q)_\infty} t$$

とする. ただし $\gamma_s$ は $t$ によらない定数で

$$\gamma_s = \frac{(q^{-s}; q)_\infty (q^{s-1+\delta}; q)_\infty (a_1 z; q)_\infty (a_1 z^{-1}; q)_\infty}{(1-q)(a_1 a_2; q)_\infty (a_1 a_3; q)_\infty (a_1 a_4; q)_\infty (q; q)_\infty}$$

とする. $\Phi(t)$ は $q$-差分方程式

$$\Phi(qt) = \Phi(t) \mathbf{b}(t),$$

$$\mathbf{b}(t) = q\frac{(1-q^{-s}t)(1-q^{s-1+\delta}t)(1-a_1zt)(1-a_1z^{-1}t)}{(1-a_1a_2t)(1-a_1a_3t)(1-a_1a_4t)(1-qt)}$$

を満たす．$\mathbf{C}^*$ 上の有理関数 $f(t)$ に対して $\xi \in \mathbf{C}^*$ を通る $q$-格子 $\Lambda_\xi = \{q^n\xi; n \in \mathbf{Z}\}$ 上の Thomae-Jackson 積分を $\Lambda_\xi$ 上の和

$$\int_{\Lambda_\xi} \Phi(t)f(t)\frac{d_qt}{t} = (1-q)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\Phi(q^\nu\xi)f(q^\nu\xi)$$

として定義する ([AAR] 参照)．もし収束するならばこれを $\langle f(t), \xi\rangle_\Phi$ と記す．$\langle f(t), \xi\rangle_\Phi$ は $q^s, z$ の準有理型関数，すなわち $q^s, z$ の適当な単項式のベキの因子を除いて有理型である．特に $t = \xi q^\nu$ $(\nu \in \mathbf{Z})$ のとき $\xi \in \mathbf{C}^*$ が一般 (generic) ならば

$$|\Phi(\xi q^\nu)| \le Kq^{|\nu|} \quad (K \text{ は } \xi \text{ に依存する定数})$$

となるゆえ $\langle 1, \xi\rangle_\Phi$ は絶対収束する．

**補題 16.3**　$\xi = 1$ ととる．$v_n(z)$ は次の Thomae-Jackson 積分表示をもつ:

$$v_n(z) = \lim_{s\to n}\int_{\Lambda_1}\Phi(t)\frac{d_qt}{t}. \tag{16.7}$$

右辺に現れる Thomae-Jackson 積分の和は格子点 $t = q^\nu$ $(\nu \ge 0)$ のみにわたる．

**証明．** $\Phi(t)$ の定義から，$\xi = 1$ のとき (16.7) の右辺の和の $\nu < 0$ の項は 0 である．(16.7) の右辺の和は絶対収束であって $\nu \ge n+1$ の項は極限 $s \to n$ のとき 0 に収束し $0 \le \nu \le n$ に対応する和は $v_n(z)$ に収束する．□

さて $s, z$ の関数 $v(s, z)$ を

$$v(s, z) = \langle 1, 1\rangle_\Phi \tag{16.8}$$

と定義する．

$t$ の有理関数 $\psi(t)$ に対して $\langle\psi(t), 1\rangle_\Phi, \langle\mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_\Phi$ が存在するならば

$$\langle\psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_\Phi = \langle\psi(t), 1\rangle_\Phi - \langle\mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_\Phi$$

なので，形式的には Thomae-Jackson 積分の和が格子点全体にわたっていることに注意して，$q$-Stokes の公式

$$\langle \psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_{\Phi} = 0 \tag{16.9}$$

が成立する．いま $t$ の有理関数

$$\psi(t) = t^{-1}\frac{(1-t)\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^{-1}t)}{(1-q^{-s-1}t)(1-q^{s-2+\delta}t)} \tag{16.10}$$

とおけば

$$\begin{aligned}\psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt) = t^{-1}&\frac{(1-t)\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^{-1}t)}{(1-q^{-s-1}t)(1-q^{s-2+\delta}t)}\\ &- t^{-1}(1-a_1zt)(1-a_1z^{-1}t)\end{aligned} \tag{16.11}$$

となる．しかしながら，この $\psi(t)$ を等式 (16.9) に適用するには注意を要する．なぜなら，$t = q^{\nu}$ $(\nu \gg 1)$ のとき

$$\begin{aligned}&\psi(t) \approx q^{-\nu},\\ &\mathbf{b}(t)\psi(qt) \approx q^{-\nu},\\ &\psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt) = O(1)\end{aligned}$$

であるから $\langle \psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_{\Phi}$ は絶対収束するが $\langle \psi(t), 1\rangle_{\Phi}, \langle \mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_{\Phi}$ は存在しないので等式 (16.9) はそのままでは意味をなさない．実際，次の補題がいえる:

**補題 16.4** $\psi(t)$ を (16.10) のようにとるとき

$$\langle \psi(t) - \mathbf{b}(t)\psi(qt), 1\rangle_{\Phi} = -\gamma_s \tag{16.12}$$

が成立する．

**注意 16.2** $s \to n$ のときには $\gamma_s \to 0$ なので，(16.12) によりこの極限の意味で $q$-Stokes の公式 (16.9) が成立することがわかる．

**証明.** 実際, 十分大きな正整数 $N$ に対して

$$\sum_{\nu=-\infty}^{N} \left(\psi(q^{\nu}) - \mathbf{b}(q^{\nu})\psi(q^{\nu+1})\right)\Phi(q^{\nu})$$

$$= -\mathbf{b}(q^N)\psi(q^{N+1})\Phi(q^N)$$
$$= -\psi(q^{N+1})\Phi(q^{N+1})$$
$$= -\gamma_s \frac{(a_1a_2q^N;q)_\infty(a_1a_3q^N;q)_\infty(a_1a_4q^N;q)_\infty(q^{N+1};q)_\infty}{(q^{-s+N};q)_\infty(q^{s-1+\delta+N};q)_\infty(a_1zq^{N+1};q)_\infty(a_1z^{-1}q^{N+1};q)_\infty}$$

であるから

$$\langle\psi(t)-\mathbf{b}(t)\psi(qt),1\rangle_\Phi$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{N}\left(\psi(q^\nu)-\mathbf{b}(q^\nu)\psi(q^{\nu+1})\right)\Phi(q^\nu) = -\gamma_s. \qquad \square$$

(16.11) を部分分数分解して (16.12) より次の基本等式を得る:

**補題 16.5**

$$C_1^*\langle\frac{1}{1-q^{-s-1}t},1\rangle_\Phi + C_2^*\langle\frac{1}{1-q^{s-2+\delta}t},1\rangle_\Phi + C_3^*\langle 1,1\rangle_\Phi + \gamma_s = 0. \qquad (16.13)$$

ただし

$$C_1^* = q^{-s-1}\frac{(1-q^{s+1})\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^s)}{1-q^{2s-1+\delta}},$$
$$C_2^* = q^{s-2+\delta}\frac{(1-q^{2-s-\delta})\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^{1-s-\delta})}{1-q^{1-2s-\delta}},$$
$$\frac{C_1^*}{1-q^{-s-1}} + \frac{C_2^*}{1-q^{s-2+\delta}} + C_3^* = -(1-a_1z)(1-a_1z^{-1}).$$

$v(s,z)$ の定義 (16.8) からただちに等式

$$\frac{1}{1-q^{2s+\delta}}\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_{s+1}}v(s+1,z)-q^{2s+\delta}v(s,z)\right) = \left\langle\frac{1}{1-q^{-s-1}t},1\right\rangle_\Phi,$$
$$\frac{1}{1-q^{-2s+2-\delta}}\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_{s-1}}v(s-1,z)-q^{-2s+2-\delta}v(s,z)\right)$$
$$= \left\langle\frac{1}{1-q^{s-2+\delta}t},1\right\rangle_\Phi$$

が得られるゆえ (16.13) より次の補題が導かれる:

**補題 16.6** $v(s,z)$ は変数 $s$ に関する差分方程式

$$\frac{C_1^*}{1-q^{2s+\delta}}\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_{s+1}}v(s+1,z)-q^{2s+\delta}v(s,z)\right)$$
$$+\frac{C_2^*}{1-q^{-2s+2-\delta}}\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_{s-1}}v(s-1,z)-q^{-2s+2-\delta}v(s,z)\right)$$
$$+C_3^*v(s,z)+\gamma_s=0 \tag{16.14}$$

を満たす.

$\gamma_s$ の定義より

$$\frac{\gamma_{s+1}}{\gamma_s}=\frac{1-q^{-s-1}}{1-q^{s-1+\delta}},\qquad \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_s}=\frac{1-q^{s-2+\delta}}{1-q^{-s}}$$

に注意して補題 16.6 を言い換えれば次の命題を得る:

**命題 16.7**

$$(1-a_1z^{-1})(a_1z-1)\,v(s,z)$$
$$=A_s(v(s+1,z)-v(s,z))+B_s(v(s-1,z)-v(s,z))-\gamma_s. \tag{16.15}$$

ここで

$$A_s=\frac{(1-q^{\delta+s-1})\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^s)}{(1-q^{\delta+2s-1})(1-q^{\delta+2s})},$$
$$B_s=\frac{(1-q^{-s})\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_kq^{1-\delta-s})}{(1-q^{1-\delta-2s})(1-q^{2-\delta-2s})}.$$

特に $s\to n$ のときには $\gamma_s\to 0$ となることに注意すれば, (16.7) と (16.15) より $v_n(z)$ の 3 項漸化式 (16.6) が導かれる.

$\varPhi(t)$ はパラメータの対合

$$\iota:\left\{\begin{array}{c} q^{\tilde{s}}=a_1^{-1}z^{-1}, q^{\tilde{\delta}}=qa_1^2, \tilde{z}=q^{\frac{1-\delta}{2}-s}, \tilde{a}_1=q^{\frac{-1+\delta}{2}}, \\ \tilde{a}_1\tilde{a}_2=a_1a_2, \tilde{a}_1\tilde{a}_3=a_1a_3, \tilde{a}_1\tilde{a}_4=a_1a_4 \end{array}\right.$$

に関して対称であるから, $v(s,z)$ は対合 $\iota$ に関して対称である. また, ずらし

$s \to s \pm 1$ には $\tilde{z} \to q^{\mp 1}\tilde{z}$ が対応する．ゆえに $v(s,z)$ の漸化式 (16.15) において $s, \delta, z, a_k$ をそれぞれ $\tilde{s}, \tilde{\delta}, \tilde{z}, \tilde{a}_k$ に置き換えることによってただちに次の $q$-差分方程式を得る:

**命題 16.8**

$$\tilde{A}(z)\left(v(s,qz) - v(s,z)\right) + \tilde{A}(z^{-1})\left(v(s,q^{-1}z) - v(s,z)\right)$$
$$+ (1-q^{-s})(1-q^{s-1+\delta})v(s,z) - \gamma_s = 0. \tag{16.16}$$

特に $s \to n$ のとき $\gamma_s \to 0$ に注意すれば，(16.7) と (16.16) より $v_n(z)$ の $q$-差分方程式 (16.5) が導かれる．

以上，$v_n(z)$ の方程式 (16.5), (16.6) が示されたことにより，$P_n(x)$ に対する命題 16.1–16.2 も証明された．

$[-1,1]$ 上の連続関数 $f(x), g(x)$ に対する内積を

$$(f,g)_\rho = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}d\rho(x)$$

と定義する．パラメータ $a_1, a_2, a_3, a_4$ の取り方から $\overline{P_n(x)} = P_n(x)$ となるゆえ

$$(P_n, P_m)_\rho = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)d\rho(x)$$

が成り立つ．次の Askey-Wilson の積分公式が成り立つ (文献 [Is2]):

**命題 16.9**　$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)d\rho(x) = h_n\delta_{n,m}.$$

ただし $\delta_{n,m}$ は Kronecker のデルタで $h_n$ は

$$h_n = \frac{(q^{2n+\delta};q)_\infty (q^{n-1+\delta};q)_n}{(q^{n+1};q)_\infty \prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_jq^n;q)_\infty} \tag{16.17}$$

で与えられる．

**証明．** 直交性は命題 16.18 で示す．直交性を使うと命題 16.1 より次の漸化式が成立する:

$$h_n = \frac{\tilde{b}_{n-1}}{\tilde{b}'_{n-1}} h_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

これより

$$h_n = \frac{\tilde{b}_{n-1}\tilde{b}_{n-2}\cdots\tilde{b}_0}{\tilde{b}'_{n-1}\tilde{b}'_{n-2}\cdots\tilde{b}'_0} h_0 = \frac{(q;q)_n(q^{n-1+\delta};q)_n \prod_{1\leq i<j\leq 4}(a_ia_j;q)_n}{(q^\delta;q)_{2n}} h_0.$$

したがって $n=0$ のときにのみ (16.17) を証明すればよい． $h_0$ については後の系 16.14 で証明する． □

## 16.2　Stieltjes 変換

以下 $a_k \in \mathbf{C}^*$ $(1 \leq k \leq 4)$ に拡張して考える． $t = \frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}$ のとき重み関数 $w(t)$ は

$$w(t) = W(\zeta)\frac{2i}{\zeta-\zeta^{-1}},$$
$$W(\zeta) = \frac{(\zeta^2;q)_\infty(\zeta^{-2};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{4}(a_k\zeta;q)_\infty(a_k\zeta^{-1};q)_\infty}$$

と表される． $dt = \frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2}\frac{d\zeta}{\zeta}$ に注意して，

**定義 16.10**　Askey-Wilson 多項式 $P_n(x)$ $(x = \frac{z+z^{-1}}{2})$ の Stieltjes 変換は次のように定義される:

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)w(t)}{x-t}dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=1} P_n\left(\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}\right) W(\zeta)\Omega(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \quad (|z|<1). \end{aligned}$$

ここで $\Omega(z,\zeta)$ は Cauchy 核

$$\Omega(z,\zeta) = \frac{1}{x-t} = \frac{2}{(z-\zeta)(1-z^{-1}\zeta^{-1})}$$

を表す．

方程式 (16.3) を関数 $u^*(z)=P_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)w\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$ についての $q$-差分方程式として書き直せば

$$L_z^* u^*(z)-E_n u^*(z)=0.$$

ここで $L_z^*$ は $q$-差分作用素，つまり関数 $f(z)$ に対して

$$L_z^* f(z)=\tilde{A}^*(z)f(qz)+\tilde{A}^*(z^{-1})f(q^{-1}z)-\{\tilde{A}(z)+\tilde{A}(z^{-1})\}f(z)$$

を表す．ただし $\tilde{A}^*(z)=q^{\delta-2}\frac{\prod_{k=1}^{4}(1-qa_k^{-1}z)}{(1-z^2)(1-qz^2)}$. さらに等式

$$L_z^*\Omega(z,\zeta)=L_\zeta\Omega(z,\zeta) \tag{16.18}$$

が成り立つ.

**問 16.2**　等式 (16.18) を証明せよ.

作用素 $L_z, L_z^*$ は中心差分を用いた次の Askey-Wilson 作用素を使って別の表示が得られる.

**定義 16.11**　$w(x)=w(x;a_1,a_2,a_3,a_4)$ とおく．$z$ の関数 $f(z)$ に対して

$$D_{q,z}f(z)=\frac{2}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}}\frac{f(q^{\frac{1}{2}}z)-f(q^{-\frac{1}{2}}z)}{z-z^{-1}} \tag{16.19}$$

を Askey-Wilson 作用素という.

**補題 16.12**　$L_z, L_z^*$ は作用素として次の積表示をもつ:

$$\begin{aligned}L_z=&-\frac{(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^2}{4}w^{-1}(x;a_1,a_2,a_3,a_4)\circ D_{q,z}\\&\circ w(x;a_1q^{\frac{1}{2}},a_2q^{\frac{1}{2}},a_3q^{\frac{1}{2}},a_4q^{\frac{1}{2}})\circ D_{q,z},\\L_z^*=&-\frac{(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^2}{4}D_{q,z}\circ w(x;a_1q^{\frac{1}{2}},a_2q^{\frac{1}{2}},a_3q^{\frac{1}{2}},a_4q^{\frac{1}{2}})\\&\circ D_{q,z}\circ w^{-1}(x;a_1,a_2,a_3,a_4).\end{aligned}$$

ただし $\circ$ は作用素としての積を表す (文献 [BEI], [Is1] 参照).

**問 16.3** 補題 16.12 を証明せよ．

**注意 16.3** 文献 [OS1] には補題 16.12 で述べたものと同値な作用素が提示されている．形状不変性 (shape invariance), 因子分解 (factorization), Rodrigues 公式の類似など興味ある作用素的な構造が論じられている．文献 [OS1] に述べられている作用素 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger$ との対応関係は以下の通りである:

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow D_{q,z},$$

$$\mathcal{A}^\dagger \longleftrightarrow w^{-1}(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \circ D_{q,z} \circ w(x; a_1 q^{\frac{1}{2}}, a_2 q^{\frac{1}{2}}, a_3 q^{\frac{1}{2}}, a_4 q^{\frac{1}{2}}).$$

次の補題は Cauchy 積分定理からただちに得られる．

**補題 16.13** $|a_k| < 1\ (1 \le k \le 4)$ とする．$g(\zeta)$ が円環 $\Delta_{q,1} : q \le |\zeta| \le 1$ において正則ならば，

$$\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\tilde{A}(\zeta^{-1})W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|\zeta|=1} g(q\zeta)\tilde{A}(\zeta)W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{16.20}$$

である．また $g(\zeta)$ が円環 $\Delta_{1,q^{-1}} : 1 \le |\zeta| \le q^{-1}$ において正則ならば，

$$\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\tilde{A}(\zeta)W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|\zeta|=1} g(q^{-1}\zeta)\tilde{A}(\zeta^{-1})W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{16.21}$$

である．

**証明．** $\tilde{A}(\zeta), W(\zeta)$ の定義より

$$\tilde{A}(\zeta)W(\zeta) = \tilde{A}(q^{-1}\zeta^{-1})W(q\zeta)$$

なので，等式 (16.20) のかわりに等式

$$\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\tilde{A}(\zeta^{-1})W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|\zeta|=1} g(q\zeta)\tilde{A}(q^{-1}\zeta^{-1})W(q\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{16.22}$$

を証明する．変数変換 $\zeta' = q\zeta$ により上式の右辺は

$$右辺 = \int_{|\zeta'|=q} g(\zeta')\tilde{A}(\zeta'^{-1})W(\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}$$

ところが仮定により

$$\tilde{A}(\zeta^{-1})W(\zeta) = \frac{(\zeta^2;q)_\infty(q^2\zeta^{-2};q)_\infty}{\prod_{k=1}^{4}(a_k\zeta;q)_\infty(qa_k\zeta^{-1};q)_\infty}$$

は $\Delta_{q,1}$ において正則であるから，Cauchy の積分定理により (16.22) の右辺は (16.22) の左辺に等しい．(16.21) についても同様に証明できる．□

**系 16.14**　$|a_k| < 1$ $(1 \le k \le 4)$ とする．

$$h_0(a_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} w(t)dt = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおく．$h_0(a_1,a_2,a_3,a_4)$ は $a_1,a_2,a_3,a_4$ に関して対称である．

さらに $h_0(a_1,a_2,a_3,a_4)$ は漸化式

$$h_0(qa_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{\prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_k)}{1-q^\delta}h_0(a_1,a_2,a_3,a_4) \tag{16.23}$$

を満たす．特に

$$h_0(a_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{(q^\delta;q)_\infty}{(q;q)_\infty\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j;q)_\infty}. \tag{16.24}$$

**証明** (文献 [It] 参照)．　$g(\zeta) = a_1(q\zeta^{-1}-\zeta)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&g(\zeta)\tilde{A}(\zeta^{-1}) - g(q\zeta)\tilde{A}(\zeta)\\
&= (1-q^\delta)(1-a_1\zeta)(1-a_1\zeta^{-1}) - \prod_{k=2}^{4}(1-a_1a_k).
\end{aligned}$$

このことと等式

$$h_0(qa_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}(1-a_1\zeta)(1-a_1\zeta^{-1})W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

に注意すれば，(16.20) より漸化式 (16.23) が導かれる．対称性に注意して漸化式 (16.23) を繰り返し使うと

$$h_0(a_1,a_2,a_3,a_4) = \frac{(q^\delta;q)_{4N}}{\prod_{1\le i<j\le 4}(a_ia_j;q)_{2N}}h_0(q^Na_1,q^Na_2,q^Na_3,q^Na_4)$$

が得られ，$N \to \infty$ の極限をとれば

$$\lim_{N\to\infty} h_0(q^N a_1, q^N a_2, q^N a_3, q^N a_4) = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} (\zeta^2;q)_\infty (\zeta^{-2};q)_\infty \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Jacobi の 3 重積公式 (文献 [AAR], p.497 参照) により

$$(\zeta^2;q)_\infty\,(\zeta^{-2};q)_\infty = \frac{1}{(q;q)_\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^\nu q^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}\zeta^{2\nu}(1-\zeta^{-2})$$

なので

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}(\zeta^2;q)_\infty\,(\zeta^{-2};q)_\infty\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

こうして (16.24) を得る. □

**補題 16.15** $|a_k| < 1$ $(1 \le k \le 4)$ を仮定する. $f(\zeta), g(\zeta)$ が円環 $\Delta_{q,q^{-1}}$ : $q \le |\zeta| \le q^{-1}$ において正則ならば，等式

$$\int_{|\zeta|=1} W(\zeta)\{L_\zeta f(\zeta)\}g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|\zeta|=1} W(\zeta)f(\zeta)L_\zeta g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 16.13 を適用して

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{|\zeta|=1} W(\zeta)\Big[\tilde{A}(\zeta)\{f(q\zeta)-f(\zeta)\}g(\zeta) \\
&\quad + \tilde{A}(\zeta^{-1})\{f(q^{-1}\zeta)-f(\zeta)\}g(\zeta)\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{|\zeta|=1} W(\zeta)f(\zeta)\Big[\tilde{A}(\zeta^{-1})g(q^{-1}\zeta)+\tilde{A}(\zeta)g(q\zeta) \\
&\quad - \{\tilde{A}(\zeta)+\tilde{A}(\zeta^{-1})\}g(\zeta)\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{|\zeta|=1} W(\zeta)f(\zeta)L_\zeta g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \text{右辺}.
\end{aligned}$$

□

以上の準備のもとで，

**補題 16.16** $|a_k| < 1$ $(1 \le k \le 4)$ かつ $f(\zeta)$ が円環 $\Delta_{q,q^{-1}}$ において正則ならば次の等式が得られる:

$$L_z^* \int_{|\zeta|=1} \Omega(z,\zeta)W(\zeta)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{|\zeta|=1} \Omega(z,\zeta)W(\zeta)L_\zeta f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{16.25}$$

**証明.** 仮定より $\Omega(z,\zeta), f(\zeta)$ は円環 $\Delta_{q,q^{-1}}$ において正則である．等式 (16.18) および補題 16.15 より

$$\begin{aligned}
&L_z^* \int_{|\zeta|=1} \Omega(z,\zeta)W(\zeta)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{|\zeta|=1} L_z^*\Omega(z,\zeta)W(\zeta)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{|\zeta|=1} \{L_\zeta\Omega(z,\zeta)\}W(\zeta)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{|\zeta|=1} \Omega(z,\zeta)W(\zeta)L_\zeta f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.
\end{aligned}$$

□

補題 16.16 において $f(\zeta) = P_n(\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2})$ ととれば $f(\zeta)$ は (16.3) を満たす．ゆえに次の命題が得られる:

**命題 16.17**　$S_n(z)$ は $q$-差分方程式

$$L_z^* S_n(z) - E_n S_n(z) = 0 \tag{16.26}$$

を満たす．言い換えれば $u(z) = w^{-1}(\frac{z+z^{-1}}{2})S_n(z)$ は (16.3) を満たす．

**注意 16.4**　$\mathbf{C}^*$ 上の準有理型関数 $f(z)$ で等式 $f(qz) = f(z)$ を満たすものを擬定数 (pseudo-constant) という．擬定数全体は体をなす．関数 $P_n(\frac{z+z^{-1}}{2})$, $S_n(z)w^{-1}(\frac{z+z^{-1}}{2})$ は $q$-差分方程式 (16.3) の 2 個の (擬定数のなす体上) 1 次独立な解を与える．$P_n(\frac{z+z^{-1}}{2})$ は定数倍を除いてただひとつの多項式解であり，$S_n(z)$ は ($|z| < 1$) のとき正則であって原点の近傍で漸近展開

$$S_n(z) \approx \frac{h_n}{l_n} z^{n+1}$$

をもつ (16.26) のただひとつの解として特徴づけられる．

補題 16.15 の直接の結果として次の主張が得られる:

**命題 16.18** $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は直交多項式である．すなわち

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0 \quad (n \neq m). \tag{16.27}$$

**証明.** 実際，命題 16.2 より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=1} W(\zeta) \left\{ L_\zeta P_n \left( \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \right) \right\} P_m \left( \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \int_{-1}^{1} w(t) \{ L_\zeta P_n(t) \} P_m(t) dt \\
&= E_n \int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) w(t) dt. 
\end{aligned} \tag{16.28}$$

$|a_k| < 1\,(1 \leq k \leq 4)$ を仮定すると，補題 16.15 により (16.28) は

$$E_m \int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) w(t) dt$$

に等しい．仮定から $n \neq m$ ならば $E_n \neq E_m$ であるから (16.27) が得られる．(16.27) の左辺は $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{C}^4$ に関して有理型であるから，解析接続により仮定した $|a_k| < 1$ の条件は取り除くことができる． □

**注意 16.5** Askey-Wilson 多項式は現在のところもっとも多くのパラメータもつ特殊直交多項式として知られている．Jacobi 多項式などの種々の特殊直交多項式は Askey-Wilson を特殊化したものとなっている．それらの詳しい系統図は “Askey scheme” によって知ることができる (文献 [KLS] 参照).

付録 A1

# 線形作用素としての Jacobi 行列

文献 [AG], [Ar], [Yo] を参照.

## A1.1 Hilbert 空間上の線形作用素

**定義 A1.1** $\mathbf{C}$ 上の線形空間 $\mathcal{H}$ の任意の 2 元 $x, y \in \mathcal{H}$ に対して内積 $(x, y) \in \mathbf{C}$ が与えられているとき $\mathcal{H}$ は前 Hilbert 空間 (pre-Hilbert 空間) という. $(x, x) \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ であるが, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ を $x$ のノルム (norm) あるいは長さという. $\mathrm{dis}(x, y) = \|x - y\|$ は $x, y$ の距離 (distance) を定義する. この距離によって $\mathcal{H}$ は距離空間 (metric space) になる. この距離が完備 (complete) であるとき $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間であるという.

**補題 A1.2** ノルム $\|x\|$, または内積 $(x, y)$ はそれぞれ $x$ または $x, y$ の連続関数である.

実際 $x, x', y, y' \in \mathcal{H}$ に対して $|\|x\| - \|x'\|| \leq \|x - x'\|$ であり

$$|(x, y) - (x', y')| \leq \|x - x'\| \cdot \|y\| + \|x'\| \cdot \|y - y'\|.$$

**定義 A1.3** $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{D}$ が線形空間であるとき $\mathcal{D}$ は部分空間であるという. さらに $\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}$ の閉集合であるとき閉部分空間 (closed subspace) であるという.

**定義 A1.4** $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{D}$ から $\mathcal{H}$ への作用素 $T$ が線形写像であるとき $T$ は線形作用素 (linear operator) という. $\mathcal{D}$ を $T$ の定義域 (domain) といい $D(T)$ で表す. また $T$ による $\mathcal{D}$ の像 (image) を $T$ の値域 (range) といい, $R(T)$ で表す.

以下 $D(T)$ は $\mathcal{H}$ の中で稠密 (dense) であると仮定する.

**定義 A1.5** ある正数 $C$ が存在して

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \quad (x \in D(T))$$

を満たすとき $T$ は連続 (continuous) であるという. さらに $D(T) = H$ ならば作用素 $T$ は有界 (線形) 作用素 (bounded operator) あるいは連続線形作用素という. したがって $T$ が有界作用素ならば

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{A1.1}$$

が成り立つ. (A1.1) を満たさない線形作用素 $T$ は非有界作用素 (unbounded operator) という

**定義 A1.6** $T$ が有界作用素であるとき (A1.1) を満たす $C$ の中で最小非負値が存在する. これを $T$ のノルムといい, $\|T\|$ で表す. このとき

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

が成り立つ. $\|T\|$ はまた

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H}, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \|Tx\|$$

と表される.

**定義 A1.7** 有界作用素 $T$ に対して単位球体 $B_1 : \{x \in \mathcal{H}; \|x\| \leq 1\}$ の $T$ による像が全有界 (totally bounded) であるとき $T$ はコンパクト作用素 (compact operator) であるという. ここで $\mathcal{H}$ の部分集合 $K$ が全有界であるとは $K$ の閉包 $K^a$ がコンパクトであることである.

**定義 A1.8** 線形作用素 $T$ が次の条件を満たすとき $T$ は閉作用素 (closed operator) であるという.

「$\mathcal{H}$ の点列 $x_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $x$ に収束するとき, もしも $Tx_n$ が $y$ に収束するならば $x \in D(T)$ であって等式 $Tx = y$ が成り立つ.」

閉作用素の定義はつぎのように言い換えられる:

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, x \in D(T)\}$$

を $T$ のグラフという．このとき，

**補題 A1.9**　$T$ が閉作用素であるための必要十分条件は $\mathcal{G}(T)$ が閉集合であることである．

実際，点列 $(x_n, y_n)$ が $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ で収束するための必要かつ十分条件は $x_n, y_n$ がそれぞれ $\mathcal{H}$ で収束することである．□

**補題 A1.10**　有界作用素 $T$ は閉作用素である．

実際 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とすれば $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ であるから．□

**注意 A1.1**　じつは補題 A1.10 の逆がいえる．すなわち，$D(T) = H$ である閉作用素 $T$ は有界作用素である (文献 [Yo] 定理 8.5 参照)．

**例 A1.1**　Hilbert 空間

$$\mathcal{H} = \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0}) := \left\{ \vec{u} = (u_n)_{n\geq 0} \ \left( u_n \in \mathbf{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right) \right\}$$

とおく．実数列 $a_n, b_n, b'_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ に対して Jacobi 行列:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b'_0 & & \\ b_0 & a_1 & b'_1 & \\ & b_1 & a_2 & \ddots \\ & & b_2 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{A1.2}$$

は $\mathcal{H}$ に作用する線形作用素とみなすことができる:

$$(A\vec{u})_n = a_{n-1}u_{n-1} + a_n u_n + b'_n u_{n+1} \quad (n \geq 0,\ u_{-1} = 0).$$

定義域は

$$D(A) = \{\vec{u} \in \mathcal{H}; A\vec{u} \in \mathcal{H}\}.$$

**問 A1.1** $A$ は $D(A)$ が $\mathcal{H}$ の中で稠密であってつねに閉作用素を定義する．これを示せ．(ヒント: 高々有限個の成分にのみ台 (support) をもつベクトル $\vec{u}$ 全体は $D(A)$ に含まれる.)

**問 A1.2** $$|a_n| \leq K, \quad |b_n| \leq K, \quad |b'_n| \leq K$$

を満たす正定数 $K$ が存在するならば $A$ は有界作用素である．これを示せ．(ヒント: Schwarz の不等式を利用せよ.)

**問 A1.3** $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b'_n|^2 < \infty$$

ならば $A$ はコンパクト作用素である．これを示せ．

(ヒント: $\|\vec{u}\| \leq 1$ ならば $\vec{u}$ の選び方に無関係に，十分大きな番号 $N$ をとることができて $\sum_{n \geq N} |(A\vec{u})_n|^2$ を十分小にできる．)

付録 A2

# 射影作用素による単位の分解

文献 [AG], [Ar], [Yo] を参照.

## A2.1 Hermite 作用素と自己共役作用素

$\mathcal{H}$ は $\mathbf{C}$ 上定義された可分 (separable) な Hilbert 空間とする. 内積は $(x, y)$ $(x, y \in \mathcal{H})$, ノルムは $\|x\|$ で表す. $A$ は $\mathcal{H}$ において稠密に定義された (densely defined) 線形作用素, その定義域を $D(A)$ とする: $D(A)^a = \mathcal{H}$.

**定義 A2.1**

$$(Ax, y) = (x, z) \quad (x \in D(A)) \tag{A2.1}$$

を満たす対 $\{y, z\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ を考える. このような対が存在する $y$ 全体を $D'$ とおくとき, $D'$ は線形部分空間である. $y \in D'$ に対して $z$ は一意に決まる. 対応

$$D' \ni y \longrightarrow z \in \mathcal{H}$$

は $D'$ を定義域とする線形写像 $A^*$ を定義する:

$$D(A^*) = D' \quad \text{かつ} \quad A^* y = z.$$

$A^*$ は $A$ の共役作用素あるいは随伴作用素 (adjoint operator) であるという. すなわち

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (x \in D(A), y \in D(A^*))$$

**補題 A2.2** $A^*$ はつねに閉作用素 (closed operator) である.

**定義 A2.3** $x, y \in D(A)$ のとき

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

が満たされるならば $A$ は Hermite 作用素 (symmetric operator, Hermitian operator) であるという.

**例 A2.1** $\mathcal{H} = \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ とし $A$ を実対称な Jacobi 行列とする. $\mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ を定義域とする作用素 $\hat{A}_0$ は Hermite 作用素である. このとき $\hat{A}_0^*$ の定義域 $D(\hat{A}_0^*)$ は

$$D(\hat{A}_0^*) = \{x \in \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})\ ;\ Ax \in \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$$

で与えられる.

**問 A2.1** 上の例に述べた事実を示せ.

$A$ が Hermite 作用素ならば $D(A^*) \supset D(A)$ であって, かつ $A^*x = Ax\,(x \in D(A))$ が成り立つ. すなわち $A^*$ は $A$ の拡張 (extension) である. このとき $A^* \supset A$ と表す. 定義から明らかに次が成り立つ:

**補題 A2.4** $R(A)$ を $A$ の値域とするとき

$$R(A)^{\perp} = \{x \in D(A^*);\ A^*x = 0\}.$$

**補題 A2.5** $A$ が Hermite 作用素ならば $D(A^*)^a = \mathcal{H}$ なるゆえ $A^{**} = (A^*)^*$ が定義される. このとき $A \subset A^{**}$ である. すなわち

$$A \subset A^{**} \subset A^*.$$

さらに $A^*$ が Hermite 作用素ならば $A^* = A^{**}$ が成り立つ.

**定義 A2.6** $A$ が Hermite 作用素でかつ $A = A^*$ が満たされるとき $A$ は自己共役作用素 (self adjoint operator) であるという.

**注意 A2.1** $A$ が Hermite 作用素であって $A^*$ が Hermite 作用素ならば $A^*$ は自己共役である.

**例 A2.2** $A$ が有界作用素かつ Hermite 作用素ならば $A$ は自己共役である.

## A2.2　射影作用素

**定義 A2.7**　$T_n\,(n \geq 1)$ を $\mathcal{H}$ からそれ自身への有界作用素の列として

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = T_\infty x \quad (x \in \mathcal{H})$$

を満たす有界作用素 $T_\infty$ が存在するとき $T_n$ は $T_\infty$ に強収束 (strongly convergent) するという:

$$s-\lim_{n\to\infty} T_n = T_\infty$$

で表す．また

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T_\infty\| = 0$$

を満たすとき $T_n$ は $T_\infty$ にノルム収束する，あるいは一様収束する (uniformly convergent) という．また

$$\lim_{n\to\infty} (T_n x, y) = (T_\infty x, y) \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

を満たすとき $T_n$ は $T_\infty$ に弱収束 (weakly convergent) するという:

$$w-\lim_{n\to\infty} T_n = T_\infty$$

で表す．明らかに

$$\text{ノルム収束} \Longrightarrow \text{強収束} \Longrightarrow \text{弱収束}$$

が成り立つ．

**命題 A2.8**　$V$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．$V$ の直交補空間

$$V^\perp := \{x \in \mathcal{H}; (x, y) = 0\,(y \in V)\}$$

もまた閉部分空間であって $(V^\perp)^\perp = V$ かつ

$$\mathcal{H} = V \oplus V^\perp.$$

すなわち任意の $x \in \mathcal{H}$ は

$$x = y + z \quad (y \in V, z \in V^\perp)$$

と一意に表される．さらに等式

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

が成り立つ．対応

$$P = P_V : \mathcal{H} \ni x \longrightarrow y = Px \in V$$

は有界な線形写像であって $\|Px\| \leq \|x\|$ が成り立つ．

$$Px = \begin{cases} x & (x \in V) \\ 0 & (x \in V^{\perp}) \end{cases} \tag{A2.2}$$

である．

**定義 A2.9** $P = P_V$ は $V$ への射影作用素 (projection operator) であるという．

**補題 A2.10** $P$ は次の性質をもつ:

(i) $P$ は自己共役な有界作用素である．

(ii) $P^2 = P$ を満たす．

逆に (i), (ii) を満たす有界作用素は射影作用素である．すなわちある閉部分空間 $V$ があって $P = P_V$ と表される．

$P_{\{0\}} = 0, P_{\mathcal{H}} = I, P_{V^{\perp}} = I - P_V$ である．一般に $V \subset W$ を満たす 2 個の閉部分空間 $V, W$ に対して

$$P_V P_W = P_W P_V = P_V \tag{A2.3}$$

が成り立つ．逆に (A2.3) を満たすならば $V \subset W$ である．このとき $P_V \leq P_W$ と記す．

## A2.3 Riesz の定理

**定義 A2.11** $y \in \mathcal{H}$ をひとつ固定する．写像

$$F_y : \mathcal{H} \ni x \longrightarrow (x, y) \in \mathbf{C} \tag{A2.4}$$

は連続な線形写像である．一般に $\mathcal{H}$ から $\mathbf{C}$ への連続な線形写像は線形汎関数 (linear functional) という．線形汎関数 $F$ に対して

$$|F(x)| \leq C\|x\| \quad (C \text{ は正定数})$$

が成り立つ．

Hilbert 空間に関するもっとも基本的な定理は次に述べる Riesz の定理である．

**定理 A2.12**　任意の線形汎関数 $F$ に対して，$y \in \mathcal{H}$ がただひとつ存在して $F = F_y$ である．

**証明**．$F$ が恒等的に 0 ならば $y = 0$ とおけばよい．$F$ が恒等的に 0 でないならば

$$V = \{x \in \mathcal{H}; F(x) = 0\}$$

とおけば $V$ は閉部分空間で $V \subsetneqq \mathcal{H}$ である．ゆえに $\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}$. かつ $\dim V^{\perp} = 1$. いま $F(w) = 1$ となる $w \in V^{\perp}$ をひとつとる．$y = x - F(x)w$ とおけば $F(y) = 0$ であるから $y \in V$. その結果 $x = y + F(x)w = P_V(x) + F(x)w$ となるので $\mathcal{H} = V \oplus \mathbf{C}\{w\}$. $z = w/\|w\|$ とおけば

$$(x, y) = \left(F(x)w + y, \frac{w}{\|w\|^2}\right) = F(x). \qquad \square$$

## A2.4　単位の分解

$\{E(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)\}$ を射影作用素の族であって

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(\mu) \quad (\mu \leq \lambda) \tag{A2.5}$$

を満たすものとする．このとき有界作用素

$$E(\lambda + 0) = s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda + \varepsilon), \quad E(\lambda - 0) = s - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda - \varepsilon)$$

が存在するが，これらはどちらも再び射影作用素である．また

$$E(-\infty) = s - \lim_{\lambda \downarrow -\infty} E(\lambda), \quad E(\infty) = s - \lim_{\lambda \uparrow \infty} E(\lambda) \tag{A2.6}$$

もまた射影作用素である．

**定義 A2.13** $E(\lambda)$ が (A2.5), (A2.6) を満たし，かつ $E(-\infty)=0, E(\infty)=I$ であるとき単位の分解 (resolution of the identity) であるという．以下 $E(\lambda)$ はさらに右連続すなわち

$$E(\lambda+0)=E(\lambda) \tag{A2.7}$$

を満たすものとする．

$\alpha<\beta$ に対して

$$E(\beta)-E(\alpha), \quad E(\beta)-E(\alpha-0), \quad E(\beta-0)-E(\alpha), \quad E(\beta-0)-E(\alpha-0)$$

はすべて射影作用素である．

$$((E(\beta)-E(\alpha))x,x)=\|(E(\beta)-E(\alpha))x\|^2.$$

さらに

$$dE(\lambda)dE(\mu)=0 \ \ (\lambda\neq\mu),\ (dE(\lambda))^2=dE(\lambda)$$

が成り立つ．

**補題 A2.14** $E(\lambda)$ を単位の分解とするとき $(E(\lambda)x,y)$ $(x,y\in\mathcal{H})$ は $\lambda$ の関数として右連続な (複素数値) 有界変分関数 (of bounded variation) である．

**定義 A2.15** $\alpha<\beta$ とし $\varphi(\lambda)\in C[\alpha,\beta]$ に対して分割

$$\Delta:\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\beta$$

に対する Riemann 和

$$S_\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\mu_k)\,(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}))\,x \quad (\mu_k\in[\lambda_{k-1},\lambda_k],\ x\in\mathcal{H})$$

を考える．$\delta=\max_{1\leq k\leq n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|\downarrow 0$ での極限 $s-\lim_{\delta\downarrow 0}S_\Delta$ が存在する．この極限を $\varphi(\lambda)$ の単位分解による Riemann-Stieltjes 積分といい，

$$\lim_{\delta\downarrow 0}S_\Delta x=\int_\alpha^\beta\varphi(\lambda)dE(\lambda)x$$

で表す．$\int_\alpha^\beta\varphi(\lambda)dE(\lambda)$ は有界作用素である．実際，評価式

$$\left\|\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)dE(\lambda)\right\| \leq \max_{\alpha\leq\lambda\leq\beta}|\varphi(\lambda)| \tag{A2.8}$$

が成り立つ．さらに $\alpha \to -\infty, \beta \to \infty$ とすることにより

$$\int_{-\infty}^\beta \varphi(\lambda)dE(\lambda) = s-\lim_{\alpha\downarrow-\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)dE(\lambda),$$

$$\int_\alpha^\infty \varphi(\lambda)dE(\lambda) = s-\lim_{\beta\uparrow\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)dE(\lambda),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda)dE(\lambda) = s-\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\beta\uparrow\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda)dE(\lambda)$$

が定義される．

**命題 A2.16**　$x \in \mathcal{H}$ に対して次の 3 条件は同値である:

(i)　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda)dE(\lambda)x$ が存在する．

(ii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |\varphi(\lambda)|^2\|dE(\lambda)x\|^2 < \infty$

(iii)　$\displaystyle F(y) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda)d(E(\lambda)y, x)$ は $y$ の線形汎関数である．

**定理 A2.17**　実連続関数 $\varphi(\lambda) \in C(\mathbf{R})$ に対して

$$D(\varphi(A)) = \left\{x\in\mathcal{H}; \int_{-\infty}^\infty |\varphi(\lambda)|^2\|dE(\lambda)x\|^2\right\} < \infty,$$

$$\varphi(A)x = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda)dE(\lambda)x \quad (x \in D(\varphi(A)))$$

と定義することによって $\varphi(A)$ は自己共役作用素である．そして

$$AE(\lambda) \supset E(\lambda)A$$

すなわち，

$$D(AE(\lambda)) \supset D(E(\lambda)A) \quad \text{かつ}$$

$$AE(\lambda)x = E(\lambda)Ax \quad (x \in D(E(\lambda)A))$$

が成り立つ．

# 付録 A3

# Gauss の機械的求積法

定理 7.10 で述べた公式をもっと精密にした Markov の等式について説明する (文献 [Sz] 参照).

## A3.1　機械的求積法の精密化

$[a,b]$ 上の Stieltjes 密度 $d\rho(x)$ に関する正規直交多項式 $p_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$p_n(x) = k_n x^n + \ \{低次\} \quad (k_n > 0)$$

が与えられていて $p_n(x)$ の零点を $x_1,\cdots,x_n$, 対応する Christoffel 数を $\kappa_1,\cdots,\kappa_n$ とする.

次の等式が成り立つ:

**命題 A3.1**　$[a,b]$ 上の $C^{2n}$ 級関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\rho(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu f(x_\nu) + \frac{1}{(2n)!} k_n^{-2} f^{(2n)}(\xi) \tag{A3.1}$$

を満たすような $\xi \in [a,b]$ が存在する.

命題 A3.1 を次の順序で証明する.

**補題 A3.2**

$$g(x_\nu) = f(x_\nu), \quad g'(x_\nu) = f'(x_\nu) \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

を満たす $2n-1$ 次多項式 $g(x)$ がただひとつ存在する.

**補題 A3.3**　任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

を満たす $\eta \in [a, b]$ が存在する.

**補題 A3.4** $$(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = k_n^{-2} p_n^2(x)$$
と表される.

これらの補題を総合すれば命題 A3.1 が証明される.

**命題** A3.1 **の証明**　実際

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) d\rho(x) &= \int_a^b (f(x) - g(x)) d\rho(x) + \int_a^b g(x) d\rho(x) \\
&= \int_a^b (f(x) - g(x)) d\rho(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu g(x_\nu) \\
&= \int_a^b (f(x) - g(x)) d\rho(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu f(x_\nu)
\end{aligned}$$

補題 A3.3–A3.4 より $M_1 = \min_{a \le x \le b} f^{(2n)}(x),\ M_2 = \max_{a \le x \le b} f^{(2n)}(x)$ とおくときは

$$\frac{1}{(2n)!} M_1 k_n^{-2} p_n^2(x) \le f(x) - g(x) \le \frac{1}{(2n)!} M_2 k_n^{-2} p_n^2(x)$$

ゆえに

$$\frac{1}{(2n)!} M_1 k_n^{-2} \le \int_a^b (f(x) - g(x)) d\rho(x) \le \frac{1}{(2n)!} M_2 k_n^{-2}.$$

平均値の定理により

$$\frac{1}{(2n)!} k_n^{-2} f^{(2n)}(\xi) = \int_a^b (f(x) - g(x)) d\rho(x)$$

を満たす $\xi \in [a, b]$ が存在する. □

**問 A3.1**　補題 A3.3 を証明せよ.

(ヒント: 存在をいうには

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu x + B_\nu) \prod_{\mu=1, \mu \ne \nu}^{n} \frac{(x - x_\mu)^2}{(x_\nu - x_\mu)^2}$$

とおいて未定係数法を使う.)

**問 A3.2** 補題 A3.4 を証明せよ.

$$(\text{ヒント: } F(t) = f(t) - g(t) - \frac{f(x) - g(x)}{\prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu)^2} \prod_{\nu=1}^{n} (t - x_\nu)^2 \quad (a \le t \le b)$$

とおき $F(t)$ およびその導関数について Rolle の定理を適用する.)

**問 A3.3** $f(x) = 2^x$ に対して $p_n(x)\,(n = 4, 8)$ として Chebyshev 多項式をとった機械的求積法による積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ の近似値を求めよ. また $[-1, 1]$ を 4 または 8 分割して $\displaystyle\int_{-}^{1} f(x)dx$ を台形公式で求め, これら 2 個の近似値と積分の真の値との誤差を比較せよ.

**問 A3.4** $[-1, 1]$ 上で定義されている折れ線関数

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \le x \le 0) \\ 1 - x & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

に対して問 A3.3 と同様な計算を実行せよ.

付録 A4

# Selberg 積分

## A4.1 Selberg の積分公式

$\Re\alpha > 0, \Re\beta > 0, \Re\gamma > -\min\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{\Re\alpha}{n-1}, \dfrac{\Re\beta}{n-1}\right\}$ のとき $n$ 重積分の等式

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \{x_k^{\alpha-1}(1-x_k)^{\beta-1}\},$$

$$\prod_{1\le j<k\le n} |x_j - x_k|^{2\gamma} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+(k-1)\gamma)\Gamma(\beta+(k-1)\gamma)\Gamma(1+k\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+k-2)\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \tag{A4.1}$$

が成り立つ．これを Selberg 積分という．等式 (A4.1) は積分の正則化を行うことによりもっと一般の $\alpha, \beta, \gamma\,(\in \mathbf{C})$ へ拡張することができる．

$n=1$ のときはベータ関数の積分，$n=2$ のときは Dixon の積分 (1903)，A. Selberg は $n$ が一般の場合にこれを 1944 年に証明している．$\gamma = 1$ のときは Jacobi 多項式の場合の Hankel 行列式に等しい．$\gamma = \frac{1}{2}$ のときには実対称行列の，$\gamma = 2$ のときは実シンプレクティック行列の不変測度による積分の相関関数に関係がある．

証明あるいはその応用については文献 [AAR], [A2], [Fo], [FW], [Me] などを参照．

# 付録 A5

# スペクトル分解定理

文献 [AG], [Ar], [Yo] を参照.

## A5.1 Herglotz の定理

**定義 A5.1** $\mathbf{Z}$ 上の複素数値関数 $u(n)$ が任意の複素数列 $z_k$ $(1 \leq n)$ に対して

$$\sum_{k=1}^{N} u(j-k) z_j \overline{z}_k \geq 0 \quad (N = 0, 1, 2, \cdots) \tag{A5.1}$$

を満たすとき $u(n)$ は非負定値関数 (non-negative definite function) であるという. また $z_k = 0$ がすべて 0 とならないかぎり (A5.1) の左辺が正であるとき $u(n)$ は正定値関数 (positive definite function) であるという.

定義から

$$u(0) \geq 0, \quad u(-n) = \overline{u(n)}, \quad |u(n)| \leq u(0) \tag{A5.2}$$

である. したがって $u(n)$ は有界.

**例 A5.1** $u(n) = e^{2\pi i \lambda n}$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ は正定値関数である.

次は Herglotz の定理として知られる:

**定理 A5.2** $u(n)$ が正定値関数ならば $[0, 1]$ 上のある Radon 測度 $dv(\theta)$ が存在して

$$u(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n\theta} dv(\theta) \tag{A5.3}$$

と表される. ここで $v(\theta)$ は $[0, 1]$ において右連続な単調増加関数で $v(0) = 0$ と

とることができる．しかも (A5.3) の表示を与えるこのような $v(\theta)$ は一意的である．$v(\theta)$ の連続点においては

$$v(\theta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{e^{-2\pi in\theta}-1}{-2\pi ni} u(n) + \theta u(0) \quad (0 < \theta < 1)$$

で与えられる (定理 3.2 参照).

**証明**. 証明の道筋は以下のようである (文献 [Yo] 参照). $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $\mathbf{Z}$ 上の関数 $u_m$ を

$$u_m(n) = \begin{cases} \dfrac{m-|n|}{m} u(n) & (|n| \leq m-1) \\ 0 & (|n| \geq m) \end{cases}$$

と定義する．関数 $u_m$ は台 $[-m+1, m-1]$ をもつそれ自身正定値な関数である．Fourier 級数の定理により

$$v_m(\theta) = \sum_{n=-m+1, n\neq 0}^{m-1} \frac{e^{-2\pi in\theta}-1}{-2\pi in} u_m(n) + \theta u(0) \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

とおくとき $v_m(0) = 0, v_m(1) = u(0)$ かつ

$$\begin{aligned} v_m'(\theta) &= \sum_{n=-m+1}^{m-1} u_m(n) e^{-2\pi in\theta} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j,k=0}^{m-1} u(j-k) e^{2\pi i(j-k)\theta} \geq 0 \end{aligned}$$

となるゆえ $v_m(\theta)$ は単調増大関数である．そして積分表示

$$u_m(n) = \int_0^1 e^{2\pi in\theta} dv_m(\theta) \tag{A5.4}$$

が得られる．Helly の選出定理により $v_m(\theta)$ の部分列 $v_{m_\nu}(\theta)\,(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ と単調増大関数 $v(\theta)$ が存在して等式

$$\lim_{\nu\to\infty} v_{m_\nu}(\theta) = v(\theta) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

を満たす．明らかに $v(0) = 0, v(1) = u(0)$. $\lim_{m\to\infty} u_m(n) = u(n)$ に注意すれば, (A5.4) において $m = m_\nu \to \infty$ とすることにより (A5.3) を得る． □

**注意 A5.1** $[0,1]$ 上の Stieltjes 測度は $[0,1]$ において連続な関数の空間 $C[0,1]$ 上の正値汎関数として定義することができる．$C[0,1]$ 上の汎関数からなる有界閉集合は弱位相に関してコンパクトである (文献 [KF], 上巻第 4 章 §3 定理 4.3 参照)．対角線論法を使う Helly の選出定理はこの系とみなすことができる．

## A5.2 スペクトル分解定理

**定義 A5.3** 定義域が $\mathcal{H}$ の中で稠密な作用素 $U$ が $\|Ux\| = \|x\|\,(x \in \mathcal{H})$ を満たすとき $U$ は等距離作用素 (isometry) であるという．さらに $D(U) = R(U) = \mathcal{H}$ ならば $U$ は有界作用素で $U$ の逆作用素 $U^{-1}$ も有界作用素となり，ともに $\mathcal{H}$ 上に定義され, $U^* = U^{-1}$ である．すなわち $UU^* = U^*U = I$ が成り立つ．このとき $U$ はユニタリ作用素 (unitary) という．

**定理 A5.4** $U$ が $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素であるとき右連続な単位の分解 $F(\theta)\,(0 \le \theta \le 1)$:

$$F(\theta+0) = F(\theta), \;\; F(1) = I, \;\; F(0) = 0$$

で次の表示をもつものがただひとつ存在する:

$$U^n = \int_0^1 e^{2\pi n i\theta} dF(\theta). \tag{A5.5}$$

**証明.** $x \in \mathcal{H}$ を固定する．$u(n) = (U^n x, x)\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ とおくとき $u(n)$ は正定値関数である．Herglotz の定理により $x$ に依存して $[0,1]$ 上の右連続な単調増大関数 $v(\theta; x)$ で $v(0;x) = 0, v(1;x) = \|x\|^2$ を満たすものが一意に存在して

$$(U^n x, x) = \int_0^1 e^{2\pi n i\theta} dv(\theta; x)$$

が成り立つ．さらに任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して等式

$$(U^n x, y) = \int_0^1 e^{2\pi n i\theta} dv(\theta; x, y),$$
$$dv(\theta; x, y) = \frac{1}{4}\left\{dv(\theta; x+y) - dv(\theta; x-y) + idv(\theta; x+iy) - idv(\theta; x-iy)\right\}$$

が導かれる．$v(\theta;x,y)$ は $x$ について $\mathbf{C}$ の上で線形，$y$ については $\mathbf{C}$ の上で半線形である:

$$v(\theta;y,x)=\overline{v(\theta;x,y)},$$

$$|v(\theta;x,y)|\leq\|x\|\|y\|$$

このような $v(\theta;x,y)$ に対しては F. Riesz の定理を用いれば

$$v(\theta;x,y)=(F(\theta)x,y)$$

を満たす有界 Hermite 作用素 $F(\theta)$ $(\|F(\theta)\|\leq 1)$ が存在して

$$v(\theta;x,y)=(F(\theta)x,y),\quad F(\theta+0)=F(\theta)\ (\text{弱収束})$$

を満たすことが証明できる．こうして等式

$$(U^nx,y)=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d(F(\theta)x,y) \tag{A5.6}$$

が導かれる．ところが

**補題 A5.5**　　$F(\theta)F(\theta')=F(\min(\theta,\theta'))$

が成り立つ．

**証明．** 実際

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d(F(\theta)U^mx,y)\\
&=(U^nU^mx,y)=(U^{n+m}x,y)\\
&=\int_0^1 e^{2\pi i(n+m)\theta}d(F(\theta)x,y)\\
&=\int_0^1 e^{2\pi in\theta}d\left\{\int_0^\theta e^{2\pi im\theta'}d(F(\theta')x,y)\right\}.
\end{aligned}$$

一意性より

$$\begin{aligned}
(F(\theta)U^mx,y)&=\int_0^\theta e^{2\pi im\theta'}d(F(\theta')x,y)\\
&=\int_0^1 e^{2\pi im\theta'}d(F(\min(\theta,\theta'))x,y).
\end{aligned}$$

左辺は

$$(F(\theta)U^m x, y) = (U^m x, F(\theta)y) = \int_0^1 e^{2\pi i m\theta'} d(F(\theta')x, F(\theta)y)$$

に等しい．再び一意性より

$$(F(\min(\theta, \theta'))x, y) = (F(\theta')x, F(\theta)y) = (F(\theta)F(\theta')x, y).$$

$F(0) = 0$ であったから

$$F(\min(\theta, \theta')) = F(\theta)F(\theta'). \qquad \square$$

**定理 A5.4 の証明**　補題 A5.5 より $F(\theta + 0) = F(\theta)$ (強収束) がいえる．実際 $0 \le \lambda < \mu \le 1$ に対して補題 A5.5 より

$$\|(F(\mu) - F(\lambda))x\|^2 = ((F(\mu) - F(\lambda))x, x)$$

である．ゆえに

$$U^n = \int_0^1 e^{2\pi i n\theta} dF(\theta) \quad (\text{強収束})$$

が成り立つ． □

**命題 A5.6** $A$ が閉 Hermite 作用素とする．

(i) $x \in D(A)$ が $(A + iI)x = 0$ を満たすならば $x = 0$ である．

$\{(A + iI)x, (A - iI)x; x \in D(A)\}$ をグラフとする等距離閉作用素 $U = U_A$ が存在する．

(ii) $D(A) = R(I - U)$.

ゆえに $R(I - U)$ は $\mathcal{H}$ の中で稠密である．

(iii) $y \in D(U)$ ならば

$$A(y - Uy) = i(y + Uy).$$

**定義 A5.7** 命題 A5.6 で定義された等距離閉作用素 $U_A$ は $A$ の Cayley 変換という．しばしば $U_A = (A - iI)(A + iI)^{-1}$ と記す．

**命題 A5.8**　$U$ を $R(I-U)$ が稠密な等距離閉作用素とするとき，$U=U_A$ を満たす閉 Hermite 作用素 $A$ がただひとつ存在する．

**系 A5.9**　2 個の閉 Hermite 作用素 $A_1, A_2$ に対して $U_1 = U_{A_1}, U_2 = U_{A_2}$ とおけば

$$U_1 \subset U_2 \Longleftrightarrow A_1 \subset A_2.$$

**定理 A5.10**　閉 Hermite 作用素 $A$ の Cayley 変換 $U$ がユニタリになるための必要十分条件は $A$ が自己共役となることである．

次の定理は von Neumann のスペクトル分解定理として知られる:

**定理 A5.11**　$A$ が自己共役ならば単位の分解 $E(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ が一意的に存在して

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda) \quad (\text{強収束})$$

が成り立つ．その定義域は

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H};\ \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \|dE(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}$$

で与えられる．もっと一般に $\varphi(\lambda)$ が $\mathbf{R}$ 上で実数値連続関数のとき自己共役作用素 $\varphi(A)$ は

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) dE(\lambda),$$
$$D(\varphi(A)) = \left\{ x \in \mathcal{H};\ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \|dE(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}$$

によって定義される．

**証明.**　$A$ の Cayley 変換 $U = U_A$ はユニタリであるから $I$ の分解 $F(\theta)\,(0 \le \theta \le 1)$ が存在して

$$U = \int_0^1 e^{2\pi i\theta} dF(\theta)$$

と表される．さて $y \in \mathcal{H}$ が $y = Uy$ を満たすならば $y = 0$ である．実際

$$(y, z) = (Uy, Uz) = (y, Uz) \quad (z \in \mathcal{H})$$

であるから $(y, z - Uz) = 0$. ところが $R(I - U)^a = \mathcal{H}$ より $y = 0$. ゆえに $F(+0) = F(0) = 0, F(1-0) = F(1) = I$. そこで変数変換 $\lambda = -\cot \pi\theta$ を用いて

$$E(\lambda) = F(\theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

とおくときは $\theta \to +0$ のとき $\lambda \to -\infty$, $\theta \to 1-0$ のとき $\lambda \to \infty$. いま

$$A' = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda),$$

$$D(A') = \left\{ x \in \mathcal{H}; \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \|dE(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}$$

と定義すると, $A'$ は自己共役である. そして次の等式が成り立つ.

$$(A'(y - Uy), x) = (i(y + Uy), x) \quad (x, y \in \mathcal{H}). \tag{A5.7}$$

実際

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(E(\lambda)(y - Uy), x\right) \\
&= -\int_0^1 \cot\theta \left(dF(\theta)(y - Uy), x\right) \\
&= -\int_0^1 \cot\theta (dF(\theta)y, x) + \int_0^1 \cot\theta \left( dF(\theta) \int_0^1 e^{2\pi i\theta'} dF(\theta')y, x \right) \\
&= -\int_0^1 \cot\theta (dF(\theta)y, x) + \int_0^1 \cot\theta e^{2\pi i\theta} (dF(\theta)y, x) \\
&= \int_0^1 \cot\theta (e^{2\pi i\theta} - 1)(dF(\theta)y, x) \\
&= i \int_0^1 (e^{2\pi i\theta} + 1)(dF(\theta)y, x).
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= i(y, x) + i\int_0^1 e^{2\pi i\theta} (dF(\theta)y, x) \\
&= i\int_0^1 (dF(\theta)y, x) + i\int_0^1 e^{2\pi i\theta}(dF(\theta)y, x) \\
&= i\int_0^1 (e^{2\pi i\theta} + 1)(dF(\theta)y, x) \\
&= i(y + Uy, x).
\end{aligned}$$

ゆえに $D(A') \supset R(I-U)$. 命題 A5.6 (iii) および (A5.7) より $A'x = Ax$ $(x \in R(I-U)$. $R(I-U) = D(A)$ であるから $A' \supset A$. $A, A'$ はともに自己共役であるから $A = A'$ が得られる. □

**定義 A5.12** $t$ に関して連続なユニタリ作用素の族 $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ が

$$U(0) = I, \quad U(t+t') = U(t)U(t')$$

を満たすとき 1 径数ユニタリ変換群という.

定理 A5.11 において $\varphi(\lambda) = e^{it\lambda}$ ととるとき

$$U(t) = e^{itA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE(\lambda)$$

は 1 径数ユニタリ変換群を定義する.

逆に, 次の M.H.Stone の定理が成立する:

**定理 A5.13** $U(t)$ が 1 径数ユニタリ変換群とするとき自己共役作用素 $A$ が存在して

$$U(t) = e^{itA}$$

と表される. このような $A$ は一意である.

さらに次の定理がいえる:

**定理 A5.14** $A$ を自己共役作用素とするとき, $\Im(z) \neq 0$ となる $z \in \mathbf{C}$ に対して

$$(zI - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\lambda} dE(\lambda) \tag{A5.8}$$

は有界作用素を定義する.

$R(zI-A)^{-1} \subset D(A)$ であって

$$I = (zI-A)(zI-A)^{-1} \supset (zI-A)^{-1}(zI-A)$$

が成り立つ. $(zI-A)^{-1}$ は $A$ のレゾルベント (resolvent) という.

**定義 A5.15**　定理 A5.14 において $(zI-A)^{-1}$ が有界作用素であるような $z\in\mathbf{C}$ はレゾルベント集合 (resolvent set) という．レゾルベント集合は開集合である．レゾルベント集合の補集合は $A$ のスペクトル (spectrum) という．$A$ のスペクトルは $\mathbf{R}$ の閉部分集合である．$A$ のスペクトルは実質的に連続スペクトル (essentially continuous spectrum)，特異スペクトル (singular spectrum) に分類される．固有値 (点スペクトル) は特異スペクトルの特別な場合である．

## A5.3　正定値作用素

**定義 A5.16**　自己共役な作用素 $A$ が

$$(A\vec{u},\vec{u})\geq 0\quad(\vec{u}\in D(A))\tag{A5.9}$$

を満たすとき $A$ は非負定値であるという．さらに $\vec{u}\neq 0$ のとき左辺が 0 でないならば $A$ は正定値であるという．

次の定理が成り立つ:

**定理 A5.17**　作用素 $A$ が非負定値であるための必要十分条件は $E(-0)=\lim_{\delta\downarrow 0}E(-\delta)=0$ となることである．また $A$ が正定値であるための必要十分条件は $E(0)=0$ となることである．

**証明.**　実際 $A$ が非負定値ならば

$$\begin{aligned}(A\vec{u},\vec{u})&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(dE(\lambda)\vec{u},\vec{u})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\|dE(\lambda)\vec{u}\|^2\geq 0.\end{aligned}$$

これより

$$E(\lambda)\vec{u}=0\quad(\lambda<0)$$

がいえる．また逆もいえる．次に $A$ が正定値と仮定する．もしも $E(0)\neq 0$ ならば $\vec{u}\in E(0)\mathcal{H}$ $(\vec{u}\neq 0)$ をとるとき $(A\vec{u},\vec{u})=0$ であるから矛盾である．最後に $E(0)=0$ と仮定する．任意の $\vec{u}\in\mathcal{H}$ $(\vec{u}\neq 0)$ に対してある $0<\alpha<\beta$ が存

在して $(E(\beta)-E(\alpha))\vec{u} \neq 0$ である．ゆえに

$$\begin{aligned}(A\vec{u},\vec{u}) &= \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{\delta}^{\infty}\lambda\|dE(\lambda)\vec{u}\|^2 \\ &\geq \alpha\int_{\alpha}^{\beta}\|dE(\lambda)\vec{u}\|^2 \\ &= \alpha\|(E(\beta)-E(\alpha))\vec{u}\|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

付録 A6

# 鞍点法と漸近展開

## A6.1　積分における鞍点法と漸近展開

複素平面内の領域 $D$ で正則な関数 $f(z), g(z)$ が与えられているものとする．$D$ 内の曲線 $\mathcal{C}$ 上の線積分

$$F(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} g(z) e^{\lambda f(z)} dz \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \tag{A6.1}$$

について $\lambda \to \infty$ での $F(\lambda)$ の振る舞いについて考察する．

$\mathcal{C}$ について次の 3 条件を仮定する．

$(\mathcal{H})$: (i)　$\mathcal{C}$ はコンパクトな $C^2$-級の連結な曲線である．

(ii)　$\mathcal{C}$ のある点 $z_0$ で $f'(z_0) = 0$ を満たし $f''(z_0) \neq 0$ である．ゆえに $z_0$ の近傍 $U$ において $f(z)$ の Taylor 展開は

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O(|z - z_0|^3)$$

と表される．

(iii)　$\mathcal{C}$ 上で $\Im f(z)$ は一定である．すなわち $\mathcal{C}$ 上で $\Im f(z) = \Im f(z_0)$. ゆえに

$$f(z) = \Re f(z) + i \Im f(z_0) \quad (z \in \mathcal{C}). \tag{A6.2}$$

さらに $\Re f(z)$ は $\mathcal{C}$ 上で最大値 $\Re f(z_0)$ をとり，それ以外の点 $z \in \mathcal{C}$ では $\Re f(z) < \Re f(z_0)$ が満たされる．

いま $f''(z_0) = |f''(z_0)| e^{i\theta_0}$ $(-\pi \leq \theta_0 \leq \pi)$ とおき，$D$ 内の $z_0$ を中心とする半径 $\delta (> 0)$ の円盤 $D_\delta$ において変数変換 $z - z_0 = e^{i(\pm\pi - \theta_0)/2} \zeta$ を行えば $f(z)$ は

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + \gamma_2\zeta^2 + 0(|\zeta|^3) \\
&= f(z_0) + \gamma_2(\xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta) + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n \zeta^n.
\end{aligned} \tag{A6.3}
$$

(ここで $\gamma_2 = -\frac{1}{2}|f''(z_0)| < 0$) と表される．$\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n\,(\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R})$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\Re f(z) = \Re f(z_0) &+ \gamma_2(\xi^2 - \eta^2) + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \xi^{n-2k}\eta^{2k} \right\} \\
&- \beta_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n-1} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \xi^{n-2k-1}\eta^{2k+1} \right\}, \\
\Im f(z) = \Im f(z_0) &+ 2\gamma_2\xi\eta + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n-1} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \xi^{n-2k-1}\eta^{2k+1} \right\} \\
&- \beta_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \xi^{n-2k}\eta^{2k} \right\}.
\end{aligned}
$$

したがって方程式 $\Im f(z) = \Im f(z_0)$ は

$$
\begin{aligned}
2\gamma_2\xi\eta &+ \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n-1} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \xi^{n-2k-1}\eta^{2k+1} \right\} \\
&- \beta_n \left\{ \sum_{k=0}^{2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} \xi^{n-2k}\eta^{2k} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{A6.4}
$$

と同値である．条件 $(\mathcal{H})$ の下に $F(\lambda)$ の漸近展開を与える次の定理が成り立つ:

**定理 A6.1**　$\lambda \to \infty$ のとき

$$
F(\lambda) = e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}}\, e^{i(\pm\pi - \theta_0)/2} \left(g(z_0) + h(\lambda)\right). \tag{A6.5}
$$

ここで

$$
|h(\lambda)| \le \frac{1}{|\lambda|} \left( M_0 \max_{z\in\mathcal{C}} |g(z)| + M_1 \max_{z\in\mathcal{C}\cap D_\delta} |g'(z)| \right).
$$

$M_0, M_1$ は $f(z)$ および $\mathcal{C}$ のみによる定数.

定理 A6.1 を証明するために次の補題 A6.2 を用意する.

**補題 A6.2** $\delta_1 > 0$ を十分小にとれば $|\xi| \leq \delta_1$ において収束する実解析関数

$$\eta = \varphi(\xi) = u_2\xi^2 + u_3\xi^3 + \cdots \tag{A6.6}$$

がただひとつ存在して (A6.4) を満たす．同じく $|\eta| \leq \delta_1$ において収束する実解析関数

$$\xi = \psi(\eta) = v_2\eta^2 + v_3\eta^3 + \cdots \tag{A6.7}$$

がただひとつ存在して (A6.4) を満たす．

**証明.** $\varphi(\xi)$ を未定係数法で求めることができる．実際

$$u_2 = \frac{\beta_3}{2\gamma_2}, \quad u_3 = \frac{1}{2\gamma_2}\left(-\frac{3\alpha_3\beta_3}{2\gamma_2} + \beta_4\right), \cdots$$

であって $u_n\,(n \geq 4)$ は $u_2, u_3, \cdots, u_{n-1}$ を用いて一意的に求められる．このようにして得られた形式的級数が $\xi = 0$ の近傍で収束することが優級数の方法で証明できる．$\psi(\eta)$ についても同様である． □

**問 A6.1** (A6.6), (A6.7) が実際に収束することを示せ．

$\delta_2 > 0\,(\delta_2 < \delta_1)$ を十分小にとって $D_{\delta_2}$ 含まれる $\mathcal{C}$ の切片を $\mathcal{C}_{\delta_2}$ とする．$\Re f(z)$ を曲線 $\Gamma_1 : \eta = \varphi(\xi)$ 上に制限すれば

$$\Re f(z) = \Re f(z_0) + \gamma_2\xi^2 + 0(|\xi|^3),$$

曲線 $\Gamma_2 : \xi = \psi(\eta)$ 上に制限すれば

$$\Re f(z) = \Re f(z_0) - \gamma_2\eta^2 + 0(|\eta|^3)$$

であるから $\Re f(z)$ は $\Gamma_1$ 上では $z = z_0$ で極大値を，$\Gamma_2$ 上では極小値をとる (図 A6.1 参照)．仮定から $\mathcal{C}_{\delta_2}$ は $D_{\delta_2}$ では $\Gamma_1$ に一致するとしてよい．さらに正数 $\delta_3, \delta_3'$ を $\delta_2 = |-\delta_3 + i\varphi(-\delta_3)| = |\delta_3' + i\varphi(\delta_3')|$ となるように一意に決めることができる．

以下 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ は断ることなく適当な正数を表すものとする．仮定から $z \in \mathcal{C} - \mathcal{C}_{\delta_2}$ ならば

$$\Re f(z) \leq \Re f(z_0) - \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ は正定数}).$$

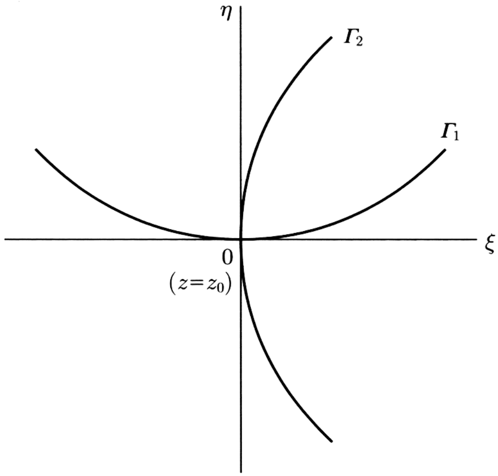



**図 A6.1**

ゆえに

$$F(\lambda)=e^{i\lambda\Im f(z_0)}\int_{\mathcal{C}}g(z)e^{\lambda\Re f(z)}dz$$
$$=e^{i\lambda\Im f(z_0)}\left\{\int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_{\delta_2}}g(z)e^{\lambda\Re f(z)}dz+\int_{\mathcal{C}_{\delta_2}}g(z)e^{\lambda\Re f(z)}dz\right\}.$$

$z\in\mathcal{C}-\mathcal{C}_{\delta_2}$ のとき

$$|g(z)e^{\lambda\Re f(z)}|\le C_1e^{\lambda(\Re f(z_0)-\varepsilon)}.$$

ゆえに

$$\left|\int_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_{\delta_2}}g(z)e^{\lambda\Re f(z)}dz\right|\le C_2e^{\lambda(\Re f(z_0)-\varepsilon)}.$$

また $z=z_0+e^{i(\pm\pi-\theta_0)/2}\{\xi+i\varphi(\xi)\}$ を代入して $f(z)=\tilde{f}(\xi), g(z)=\tilde{g}(\xi)$ となるものとすれば $(f(z_0)=\tilde{f}(0), g(z_0)=\tilde{g}(0)$ に注意),

$$\int_{\mathcal{C}_{\delta_2}}g(z)e^{\lambda\Re f(z)}dz=e^{\frac{i(\pm\pi-\theta_0)}{2}}\int_{-\delta_3}^{\delta_3'}\tilde{g}(\xi)e^{\lambda\Re\tilde{f}(\xi)}(1+i\varphi'(\xi))d\xi. \qquad \text{(A6.8)}$$

さて $\xi=0$ の近傍で実解析的変換 $\xi=\xi_1+\chi(\xi_1)$ $(\chi(\xi_1)=0(|\xi_1|^2))$ が存在して

$$\Re \tilde{f}(\xi) = \Re f(z_0) + \gamma_2 {\xi_1}^2$$

と表される．$-\delta_3, \delta_3'$ がそれぞれ $-\delta_4, \delta_4'$ に対応するものとすれば，(A6.8) は

$$e^{\frac{i(\pm\pi-\theta_0)}{2}} \int_{-\delta_4}^{{\delta_4}'} e^{\lambda\gamma_2{\xi_1}^2} G(\xi_1) d\xi_1$$

に等しい．ここで

$$\begin{aligned} G(\xi_1) &= \tilde{g}\,(\xi_1 + \chi(\xi_1)) \cdot (1 + i\varphi(\xi_1 + \chi(\xi_1))(1 + \chi'(\xi_1)) \\ &= g(z_0) + 0(|\xi_1|). \end{aligned}$$

さて $\min(\delta_4, \delta_4') \geq \varepsilon_1 > 0$ とすれば

$$\int_{-\delta_4}^{\delta_4'} g(z_0) e^{\lambda\gamma_2\xi_1^2} d\xi_1 = g(z_0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda|\gamma_2|}} + 0(e^{-\lambda|\gamma_2|\varepsilon_1^2}), \tag{A6.9}$$

$$|G(\xi) - g(z_0)| \leq C_3|\xi_1| \quad (-\delta_4 \leq \xi_1 \leq \delta_4'),$$

および

$$\left| \int_{-\delta_4}^{\delta_4'} \xi_1^{2m} e^{\lambda\gamma_2\xi_1^2} d\xi_1 \right| \leq C_4 \frac{1}{(\lambda|\gamma_2|)^{m+1/2}} \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{A6.10}$$

$$\left| \int_{-\delta_4}^{\delta_4'} \xi_1^{2m+1} e^{\lambda\gamma_2\xi_1^2} d\xi_1 \right| \leq C_5 e^{-\lambda|\gamma_2|\varepsilon_1^2} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{A6.11}$$

であるから評価式 (A6.5) を得る． □

**問 A6.2** (A6.9), (A6.10), (A6.11) を示せ．

**注意 A6.1** 定理 A6.1 において実 2 次元曲面 $\mathcal{C} = \Re f(x)$ は $z = z_0$ において鞍点 (saddle point) をもつ．定理 A6.1 を用いて漸近展開を求める方法は鞍点法 (saddle point method) あるいは最急降下法 (steepest descent method) あるいは Laplace-Debye の方法とよばれていて，定常相の方法 (stationary phase method) と並んで広く利用される極めて重要なものである (文献 [AK], [BH], [Er], [HKT], [In], [Sz] 参照)．

## A6.2　応用例

以下 $\lambda > 0$ と仮定する.

**例 A6.1**　$a \in \mathbf{C}$ に対して

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda z^2 + 2az} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{a^2/\lambda} \approx \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (\lambda \to \infty).$$

実際 $f(z) = -z^2, g(z) = 1$ として公式 (A6.5) を適用する.

**例 A6.2**　ベータ関数

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{A6.12}$$

において $\alpha = \alpha_0 + \nu_1 N, \beta = \beta_0 + \nu_2 N \,(N \in \mathbf{Z}_{>0}, (\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{Z}^2_{>0})$ のとき $N \to \infty$ での漸近展開を求める. (A6.12) の右辺は

$$\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1} \exp[\nu_1 \log t + \nu_2 \log(1-t)] dt$$

と書かれるゆえ, $f(t) = \nu_1 \log t + \nu_2 \log(1-t), g(t) = t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\beta_0-1}$ とおける. $f'(z) = 0$ となるのは $z_0 = \dfrac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}$ のときのみ. そして $f''(z_0) = -\dfrac{(\nu_1+\nu_2)^3}{\nu_1 \nu_2}$. 区間 $[0,1]$ の上で $\Im f(z) = \Im f(z_0) = 0$ かつ $\Re f(z)$ は $z_0$ で最大値をとるから定理 A6.1 より

$$B(\alpha, \beta) \approx \left(\frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\right)^{\beta-1} \sqrt{\frac{2\pi \nu_1 \nu_2}{N(\nu_1 + \nu_2)^3}} \quad (N \to \infty). \tag{A6.13}$$

**問 A6.3**　A6.2 において $\nu_1 \nu_2 < 0 \,(\nu_1 \neq -\nu_2)$ のとき $\Im f(z) = \Im f(z_0) = 0$ かつ $\Re f(z)$ が $z_0$ で最大値をとるような曲線 $C$ の形状はどのようなものか？ $\nu_1 > -\nu_2 > 0$ および $-\nu_2 > \nu_1 > 0$ に分けて図示せよ. また $\nu_1 < 0, \nu_2 < 0$ のときはどうか？

**問 A6.4**　A6.2 において $\nu_1 \nu_2 < 0, \nu_1 \neq -\nu_2$ あるいは $\nu_1 < 0, \nu_2 < 0$ のとき $B(\alpha, \beta)$ の漸近展開を求めよ.

**例 A6.3** (文献 [In] 参照).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{A6.14}$$

において $z \to \infty$ での漸近展開を求める．$t = zt_1$ とおくと (A6.14) は

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty t_1^{-1} \exp[z(\log t_1 - t_1)] dt_1.$$

$f(t_1) = \log t_1 - t_1, g(t_1) = t_1^{-1}$ とおく．$f'(t_1) = 0$ となるのは $t_1 = 1$ のときのみ．さらに区間 $[0, \infty)$ において $\Im f(t_1) = \Im f(1) = 0$, かつ $\Re f(t_1)$ は $t_1 = 1$ のとき最大値 $-1$ をとる．ゆえに

$$\Gamma(z) \approx z^z e^{-z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right) \quad (z \to \infty).$$

これは Stirling の公式に他ならない．

**問 A6.5**　A6.3 において上と同様な方針で $z \to -\infty$ での漸近展開を求めよ．

## A6.3　勾配ベクトル場と安定サイクル

**定義 A6.3**　パラメータ $t\,(\alpha \leq t \leq \beta)$ に関する微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Re f(z) \tag{A6.15}$$

によって定義される $D$ 内のベクトル場を $\Re f(z)$ の勾配ベクトル場 (gradient vector field) といい，$\mathrm{grad}\, \Re f(z)$ で表す．$z = x + iy$ を用いて Cauchy-Riemann の関係式より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \Re f(z) = \frac{\partial}{\partial y} \Im f(z), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \Re f(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \Im f(z) \tag{A6.16}$$

と表されるので，$\Im f(z)$ を Hamilton 関数とする正準方程式 (canonical equation) でもある ([Arn], [AK] 参照).

**補題 A6.4**　$\Re f(z)$ は $\mathrm{grad} f(z)$ に沿って $t$ の増加ととも単調増加する．他方 $\Im f(z)$ は軌道に沿って一定である．

実際 (A6.16) より

$$\frac{d}{dt}\Re f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\Re f(z)\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Re f(z)\cdot\frac{d\overline{z}}{dt}$$
$$= 2\left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Re f(z)\right|^2 \geq 0$$

であるから．一方 $\Im f(z)$ については (A6.16) より

$$\frac{d}{dt}\Im f(z) = \frac{\partial}{\partial x}\Im f(z)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\Im f(z)\cdot\frac{dy}{dt} = 0. \qquad \square$$

**定義 A6.5**　軌道 $\mathcal{O}$：$z = z(t)$ が $t \in [\alpha, \infty)$ において定義されていて $z(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} z(t)$ が $D$ 内に存在するとき，$z(+\infty)$ は $\mathcal{O}$ の $(+\infty)$-極限点 ($\omega$ limit point) という．また $\mathcal{O}$ が $(-\infty, \beta]$ で定義されていて $z(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} z(t)$ が $D$ 内に存在するとき，$z(-\infty)$ は $(-\infty)$-極限点 ($\alpha$ limit point) という．$z(\pm\infty)$ は $z_0 = z(\pm\infty)$ が A6.1 の条件 $(\mathcal{H})$ を満たすならば $\operatorname{grad}\Re f(z)$ の双曲型特異点である．対応する軌道 $\mathcal{O}$ をそれぞれ安定軌道 (stable orbit)，不安定軌道 (unstable orbit) という．

定義からただちに，

**命題 A6.6**　$\operatorname{grad}\Re f(z)$ の極限点 $z_0$ においてはつねに $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Re f(z_0) = 0$ すなわち $f'(z_0) = 0$ である．$z_0$ を $(+\infty)$-極限点にもつ軌道 $\mathcal{O}_{z_0}^{+}$ においてはつねに $\Re f(z_0) \geq \Re f(z)$ であり，$z_0$ を $(-\infty)$-極限点にもつ軌道 $\mathcal{O}_{z_0}^{-}$ においてはつねに $\Re f(z_0) \leq \Re f(z)$ である．

**定理 A6.7**　定理 A6.1 で述べた曲線 $\mathcal{C}$ は $z_0$ を $(+\infty)$-極限点にもつ $\operatorname{grad}\Re f(z)$ の安定軌道からなる．言い換えれば定理 A6.1 に述べた定理は $z_0$ を $(+\infty)$-極限点にもつ $\operatorname{grad}\Re f(z)$ の安定軌道からなる曲線 $\mathcal{C}$ (安定サイクル (stable cycle)) に対して適用される．

**例 A6.4**　例 A6.1 の場合は $f(z) = -z^2$ であって $\operatorname{grad}\Re f(z)$ の軌道は $xy = C$ すなわち

$$\frac{dz}{dt} = -\overline{z}$$

の軌道. $z_0 = 0, \mathcal{O}_0^+$ は実軸に一致する. ベクトル場の相図 (phase diagram) は図 A6.2 のようである.

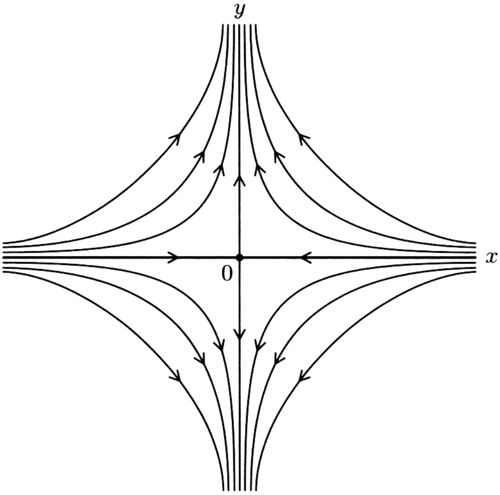



図 **A6.2**

**例 A6.5** 例 A6.2 の場合は $f(z) = \nu_1 \log z + \nu_2 \log(1-z)$ で $\operatorname{grad} \Re f(z)$ の

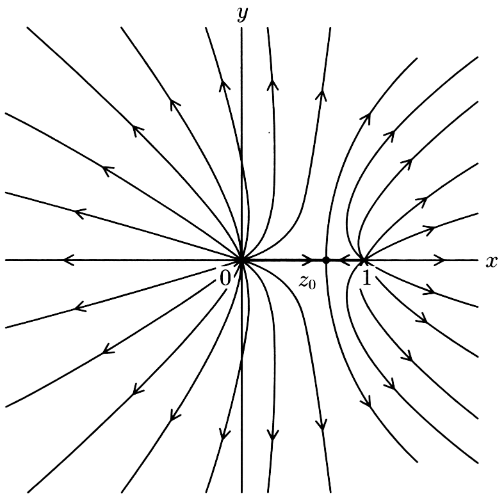



図 **A6.3**

軌道は $\nu_1 \arg z + \nu_2 \arg(1-z) = C$ すなわち

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\nu_1}{\bar{z}} + \frac{\nu_2}{\bar{z}-1}\right\}$$

の軌道．$z_0 = \dfrac{\nu_1}{\nu_1+\nu_2}$，$\mathcal{O}_{z_0}^{+}$ は実区間 $[0,1]$ に一致する．相図は図 A6.3.

**問 A6.6**　上の例 A6.4–A6.5 において相図を確認せよ．

**問 A6.7**　上の例 A6.4–A6.5 において 3 次元ユークリッド空間 (座標 $x_1, x_2, x_3$) 内の曲面 $x_3 = \Re f(x_1 + ix_2)$ のおよその図を描け．

**問 A6.8**　上の例 A6.4–A6.5 において $\mathcal{O}_{z_0}^{-}$ をすべて求め，このような軌道を積分路として採用した場合どのような漸近展開が得られるか？

**問 A6.9**　次の場合の $\mathrm{grad}\,\Re f(z)$ の特異点 (停留点) を求め，相図を描け．

(i)　$f(z) = \sin z$.

(ii)　$f(z) = z - z^3$.

(iii)　$f(z) = \log z + \log(z-1) + \log(z-a)$, ただし $a > 1$.

**問 A6.10**　問 A6.9 で与えた $f(z)$ に対して曲面 $x_3 = \Re f(x_1 + ix_2)$ の形状を求めよ．

**注意 A6.2**　勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}\,\Re f(z)$ は，ポテンシャルが $\Re f(z)$，流れ関数が $\Im f(z)$ である渦なしの非圧縮性流体の流れとも理解できる．また停留点は文字通り流れの停留点 (よどみ点) に対応している．そして写像 $w = f(x)$ は実曲線の族

$$\Im f(z) = \Im f(c_k)$$

で区分された等角写像の集まりと考えることができる．等角写像と $\mathrm{grad}\,\Re f(z)$ との関連について文献 [Im] に興味ある記述がある．

# 関連図書


[Al] G.Alexits, Convergence Problems of Orthogonal Series (English Transl from German), Pergamon, 1961.

[Ak] N.I. Akhiezer. The Classical Moment Problem and Some Related Topics in Analysis (English Transl from Russian), Hafner, New York, 1965.

[Ao1] K. Aomoto. Self-adjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree, Jour. d'Anal. Math., 53(1989), 255-278.

[Ao2] K. Aomoto. Jacobi polynomials associated with Selberg integrals, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 545–549.

[Ara] 新井朝雄. ヒルベルト空間と量子力学, 共立出版, 1996.

[Arn] V.I. Arnold. Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, 2nd ed., Springer-Verlag, 1988.

[AAR] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy. Special Functions, Cambridge Univ.Press, 1998.

[AF] K. Aomoto and P.J. Forrester. On a Jacobian identity associated with real hyperplane arrangements, Compositio Math., 121(2000), 263-995.

[AG] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, I,II (English tranl from Russian), Ungar, New York, 1961.

[AK] K. Aomoto and M. Kita. Theory of Hypergeometric Functions, Springer, 2010 (日本語版, 1994).

[BH] N. Bleinstein and R.A. Handelsmann. Asymptotic Expansions of Integrals, Dover, 1975.

[BEI] M. Brown, D. Evans and M. Ismail. The Askey-Wilson polynomials and $q$-Sturm-Liouville problems, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 119(1996).

[Ca] T. Carleman. Sur les Équations Intégrales Singulières à Noyau Réel et Symétrique, Uppsala, 1923.

[Ch] T. Chihara. An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, 1978.

[Di1] J. F. van Diejen. Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials, Invent. math., 126, 319-339.

[Di2] J. F. van Diejen. Properties of some families of hypergeometric orthogonal polynomials in several variables, Trans. AMS, 351(1999), 233-270.

[Er] A. Erdélyi. Asymptotic Expansions, Dover, 1956.

[EMOT] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, II, McGraw-Hill, 1953.

[Fo] P.J. Forrester. Log-Gases and Random Matrices, Princeton Univ. Press, 2010.

[Fr] G.Freud. On the greatest zero of an orthogonal polynomial, J.Approx.Theory, 46(1986), 16-24.

[FW] P.J. Forrester and S.O. Warner. The importance of the Selberg integral, Bull. AMS, 45(2008), 489-534.

[Ga] F.R. Gantmacher. The Theory of Matrices, I,II (English Tranl from Russian), Chelsea, 1959.

[GK] F.R. Gantmacher and M.G. Kreĭn, Sur les matrices oscillatoires et complètement non-négatives, Compositio Math., 4(1937), 445-476.

[GM] M. Giaquinta and G. Modica. Mathematical Analysis, Birkhäuser, 2010.

[Ha] H. Hamburger. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, Math.Ann., Bd 81(1920); Bd 82(1921).

[He] G. Herglotz. Über Potenzreihen mit positiven reellen Teil im Einheitskreis, Leibz. Ber. 63(1911), 501-511.

[Hi] 一松信. 特殊関数入門, 森北出版, 1998.

[HA] 伏見康治・赤井逸. 復刊 直交関数系 (増補版), 共立出版, 2011.

[HKT] C.J. Howls, T. Kawai, Y. Takei, Toward the Eaxct WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto Univ. Press, 2000.

[HO] A. Hora and N. Obata. Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Springer, 2007.

[Im] 今井功. 等角写像とその応用, 岩波書店, 1979.

[In] 犬井鉄郎. 特殊函数, 岩波書店, 1962.

[Is1] M. Ismail. An operator calculus for the Askey-Wilson operator, dedicated to the memory of G.C.Rota, Ann. Comb., 5(2001), 347-362.

[Is2] M. Ismail. Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Cambridge Univ. Press, 2005.

[IM] M.E.H. Ismail and D.R. Masson. $q$-Hermite polynomials, Transact AMS., 346(1994), 63-116.

[It] M. Ito. Askey-Wilson type integrals associated with root systems, Ramanujan Jour., 12(2006), 131-151.

[JT] W.B. Jones and W.J. Thron. Continued Fractions, Addison-Wesley, 1980.

[Ka] Y. Kato. On the spectral theory of periodic Jacobi matrices, Proc. of RIMS (edited by M.Jimbo and T.Miwa), Kyoto, 1981, 153-181.

[KA] Y. Kato and K. Aomoto. Jacobi-Perron algorithms, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering, Pub. RIMS, 20(1984), 635-658.

[Kl] F. Klein. On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals, Macmillan and Bowes, 1893 (Dover, 1963).

[Kod] 小平邦彦. 複素解析, 岩波書店, 1990.

[KF] A.N. コルモゴロフ・S.V. フォーミン. 函数解析の基礎 I,II (ロシア語からの訳) 岩波書店, 1979.

[KO] 小林俊行・大島利雄. リー群と表現論, 岩波書店, 2005.

[KLS] R. Koekoek, P.A. Leskey, R.F. Swarttouw. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their $q$-Analogues, Springer, 2010.

[Ma] A.A. Markov. Collected Works, Moscow, 1948.

[Me] M.L. Mehta. Random Matrices (3rd edtion), Elsevier, 2004.

[Mu] N.I. Mushkhelishvili. Singular Integral Equations, Noordhoff-Groningen, 1946.

[Mo] P.van Moerbeke. The spectrum of Jacobi matrices, Invent. math., 37(1976), 45-81.

[Na] 中村佳正 (編). 可積分系の応用数理, 裳華房, 2000.

[Nevai] P. Nevai. Orthogonal Polynomials, Mem. of AMS., 213(1979).

[Nevan] R. Nevanlinna. Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und Das Stieltjessche Momentenproblem, Annal. Acad. Sci. Fennicae, 18(1922), 1-53.

[NS] E.M. Nikishin and V.N. Sorokin, Rational Approximations and Orthogonality (Translated from the Russian by R.P. Boas), AMS, 1991.

[OS1] S. Odake and R. Sasaki. Exactly solvable 'discrete' quantum mechanics, shape invariance, Heisenberg solution, annihilation-creation operators and coherent states, Prog. Theor. Phys., 119(2008), 663-700.

[OS2] S. Odake and R. Sasaki. Orthogonal polynomials from Hermitian matrices, Jour. Math. Phys., 49, 053503(2008), 1-43.

[OT] P. Orlik and H. Terao. Arrangement and Hypergeometric Integrals, MSJ Memoires 9, 2001.

[Pe1] O. Perron. Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters, Jour. Reine Angew. Math., 151(1921), 63-78.

[Pe2] O. Perron. Die Lehre von der Kettenbrüche, II, 1929.

[Ra] M. Rahman. $q$-Wilson functions of the second kind, SIAM J. Math. Anal, 17(1986), 1280-1286.

[Si1] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator, Ad. in Math., 137(1998), 82-203.

[Si2] B. Simon. Orthogonal Polynomials on The Unit Circle, I,II, AMS, 2005.

[Sti] T.J. Stieltjes. Oeuvres Complètes, Vol I, II.

[Sto] M.H. Stone. Linear Transformations in Hilbert Spaces, AMS Colloq. Publ., 1932.

[Sz] G. Szegö. Orthogonal Polynomials, AMS, 23(1975), 最新版 (2003).

[Takag] 高木貞治. 代数学講義 (改訂新版), 共立出版.

[Takah] 高橋陽一郎. 実関数と Fourier 解析, 岩波書店, 2006.

[Te] G. Teschl. Jacobi Operators and Completely Integrable Non-Linear Lattices, AMS, 1991.

[Ts] 辻正次. 実函数論, 槙書店, 1962.

[To] 戸田盛和. 非線形格子力学, 岩波書店, 1978.

[Wa] H. Wall. Continued Fractions, 1948.

[We1] H. Weyl. Über das Pick-Nevalinnasche Interpolazionsproblem und sein infinitesimales Analogon, Ann. Math., 36(1935), 230-254.

[We2] H. Weyl. The Classical Groups, Princeton Univ. Press, 1939. (和訳あり).

[Wo] P. Wojtaszczyk. A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge Univ. Press, 1997.

[WW] E.T. Whittaker and G.N. Watson. A Course of Modern Analysis, Cambridge UP, 1927.

[Yo1] 吉田耕作. 復刊 ヒルベルト空間論, 共立出版, 2009.

[Zy] A. Zygmund. Trigonometric Series, Cambridge UP, I,II, 1959.

# 記号表

| | |
|---|---|
| $\mathbf{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbf{Z}_{>0}$ | 正整数全体 |
| $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ | 非負整数全体 |
| $\mathbf{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbf{R}_{>0}$ | 正数全体 |
| $\mathbf{R}_{\geq 0}$ | 非負数全体 |
| $\mathbf{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ | |
| $\mathbf{I}$ | 恒等行列または恒等作用素 |
| ${}^tA$ | 行列 $A$ の転置行列 |
| $\overline{A}$ | 行列 $A$ の複素共役 |
| $\Re\{\ \}, \Im\{\ \}$ | 実部, 虚部 |
| $\arg\{\quad\}$ | 偏角 |
| $(a,b), [a,b]\ (a<b)$ | 端点が $a,b$ の開区間，閉区間 |
| $(a,b], [a,b)\ (a<b)$ | 端点が $a,b$ の左開右閉区間，左閉右開区間 |
| $\perp$ | 直交 (1.1 節) |
| $(x,y)$ | $x,y$ の内積 (1.1 節，A1.1 節) |
| $P_W$ | $W$ への射影作用素 (1.1 節，A2.2 節) |
| $\lvert\lvert x\rvert\rvert$ | $x$ のノルム (1.1 節，3.1 節，A1.1 節) |
| $\oplus$ | 直和 (1.2 節) |
| $E(\ )$ | 射影作用素 (1.2 節，A2.4 節) |
| $\mathrm{diag}[\ ,\cdots,\ ]$ | 対角行列 (2.4 節) |
| $\delta_{m,n} \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$ | Kronecker デルタ (2.2 節) |
| $f(x+0) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon)$ | (4.1 節) |
| $d\rho(x)$ | 密度 (Stieltjes 測度) (4.1 節) |
| $L^2_\rho([a,b])$ | $d\rho(x)$ に関して $[a,b]$ 上で 2 乗可積分な空間 (4.1 節) |
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ 上で連続な関数全体 |

| | |
|---|---|
| $C^n[a,b]$ | $[a,b]$ 上で連続的に $n$ 階微分可能な関数全体 |
| $\max, \min$ | 最大値，最小値 |
| $w(x)$ | 重み関数 (4.1 節) |
| $L^2[0,1]$ | (4.2 節) |
| $c_n$ | モーメント (5.1 節) |
| $D_n$ | Hankel 行列式 (5.1 節) |
| $\binom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ | 組み合わせ数 (5.1 節) |
| $p_n(x)$ | 正規直交多項式 (6.1 節) |
| $k_n$ | (6.1 節) |
| $\delta(x)$ | Dirac デルタ関数 (6.1 節) |
| $a_n, b_n$ | (7.1 節) |
| $q_n(x)$ | (7.2 節) |
| $\vec{u}$ | 縦ベクトル $(u_n)_{n\geq 0}$ (7.1 節) |
| $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}_{\geq 0}}$ | 複素数列の空間 (7.1 節) |
| $\kappa_\nu$ | Christoffel 数 (7.2 節) |
| $\mathrm{Supp}(d\rho)$ | $d\rho(x)$ の台 (support) (7.2 節) |
| $\deg f$ | 多項式 $f$ の次数 (7.2 節) |
| $X\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ | 行列 $X$ の $i_1, i_2, \cdots, u_r$ 行, $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列の成分からなる $r$ 次小行列式 (7.3 節) |
| $\Gamma(z)$ | ガンマ関数 (8.1 節) |
| $B(p,q)$ | ベータ関数 (8.1 節) |
| $(2n-1)!!$, $(2n)!!$ | (5.1 節，8.1 節) |
| $l_n^{(\alpha,\beta)}, h_n^{(\alpha,\beta)}$ | (8.1 節) |
| $(a)_n$ | Pochhammer の記号 (8.3 節) |
| $a \gg b$ | $a-b$ は十分大きな正数 (8.4 節) |
| $A \approx B$ | $A, B$ は同位無限小または同位無限大 (8.4 節) |
| $f(x+i0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} f(x+i\varepsilon)$ | (8.4 節) |
| $f(n) = O(g(n))$ | $n \to \infty$ のとき $f(n)/g(n)$ は有界 (11.1 節) |
| $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ | $\varepsilon \to 0$ のとき $f(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ は有界 (11.1 節) |
| $\widehat{K}$ | 集合 $K$ の凸包 (11.1 節) |
| $\mathrm{dis}(x,K)$ | 点 $x$ と集合 $A$ との距離 (11.4 節) |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{H}_{\pm}$ | 上 (下) 半面 (12.1 節) |
| $\Gamma_{\infty}$ | 円盤 $\Gamma_n$ の極限集合 (12.2 節) |
| $\mathcal{H} := \mathbf{l}^2(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ | (13.1 節) |
| $\mathbf{l}(\mathbf{Z}_{\geq 0})$ | (13.1 節) |
| $D(T), R(T)$ | $T$ の定義域，値域 (13.1 節，A1.1 節) |
| $T^*$ | $T$ の随伴作用素 (13.1 節，A1.1 節) |
| $\Delta^{(r,s)}(x)$ | (13.1 節) |
| $a \equiv b \mod V$ | $a, b$ は $V$ を法として合同 (13.1 節) |
| $G(m,n\|z), G'(m,n\|z)$ | Green 関数 (13.1 節) |
| $\Theta(m,n\|\lambda)$ | スペクトル核 (13.1 節) |
| $S_n(z)$ | $p_n(x)$ の Stieltjes 変換 (13.1 節) |
| $\operatorname{grad} u$ | $u$ の勾配ベクトル場 (14.1 節) |
| $\mathbf{C}P^1$ | Riemann 球面 (14.1 節) |
| $\sigma \sim \tau$ | $\sigma$ と $\tau$ はホモローグ (14.1 節) |
| $A \sqcup B$ | 互いに無縁な $A, B$ の合併集合 (15.1 節) |
| $(a;q)_{\infty}$, $(a;q)_n$ | (16.1 節) |
| $D_{q,z}$ | Askey-Wilson 作用素 (16.2 節) |
| $\operatorname{dis}(x,y) := \|\|x-y\|\|$ | (A1.1 節) |
| sup | 上限 (A1.1 節) |
| $s - \lim\limits_{n\to\infty}$, $w - \lim\limits_{n\to\infty}$ | 強極限，弱極限 (A2.2 節) |

# 人名一覧

R. Askey (アスキー, 1933- )

E. Beltrami (ベルトラミ, 1835-1899)

F.W. Bessel (ベッセル, 1784-1846)

E. Borel (ボレル, 1871-1956)

T. Carleman (カルレマン, 1892-1949)

A.L. Cauchy (コーシー, 1789-1857)

A. Cayley (ケイリー, 1821-1895)

C. Charlier (シャルリエ, 1862-1934)

P. Chebyshev (チェビシェフ, 1821-1894)

E. Christoffel (クリストッフェル, 1829-1900)

J.G. Darboux (ダルブー, 1842-1917)

G. de Rham (ドラム, 1903-1990)

P. Debye (デバイ, 1884-1966)

P. Dirac (ディラック, 1902-1984)

A.C. Dixon (ディクソン, 1865-1936)

Euclid (ユークリッド, BC325-BC265)

L. Euler (オイラー, 1707-1783)

F.G. Frobenius (フロベニウス, 1849-1917)

J.B. Fourier (フーリエ, 1768-1830)

I.L. Fuchs (フックス, 1833-1902)

F.R.Gantmacher (ガントマッヘル, 1908-1964)

J.C.F. Gauss (ガウス, 1777-1855)

L. Gegenbauer (ゲーゲンバウエル, 1849-1903)

J.P. Gram (グラム, 1850-1916)

G. Green (グリーン, 1793-1841)

H. Hamburger (ハンブルガー, 1889-1956)

W. Hamilton (ハミルトン, 1805-1865)

F. Hausdorff (ハウスドルフ, 1869-1942)

H. Hankel (ハンケル, 1839-1873)

E. Helly (ヘリー, 1884-1943)

G. Herglotz (ヘルグロッツ, 1881-1953)

C. Hermite (エルミート, 1822-1902)

D. Hilbert (ヒルベルト, 1862-1943)

O. Hölder (ヘルダー, 1859-1937)

犬井鉄郎 (1905-1989)

F.H. Jackson (ジャクソン)

C. Jacobi (ヤコビ, 1804-1851)

小平邦彦 (1915-1997)

M.G.Kreĭn (クライン, 1907-1989)

L. Kronecker (クロネッカー, 1823-1891)

E. Kummer (クンマー, 1810-1893)

J-L. Lagrange (ラグランジュ, 1736-1813)

E. Laguerre (ラゲール, 1834-1886)

P-A. Laplace (ラプラス, 1749-1827)

P.A. Laurent (ローラン, 1813-1854)

H. Lebesgue (ルベーグ, 1875-1941)

A. Legendre (ルジャンドル, 1752-1833)

M.S. Lie (リー, 1842-1899)

J. Liouville (リウヴィユ, 1809-1882)

A.A. Markov (マルコフ, 1856-1922)

R. Nevanlinna (ネヴァンリンナ, 1895-1980)

I. Newton (ニュートン, 1643-1727)

H. Padé (パデ, 1863-1953)

M-A. Parseval (パーセヴァル, 1755-1836)

O. Perron (ペロン, 1880-1975)

L. Pochhammer (ポッホハンマー, 1841-1920)

S.D. Poisson (ポアソン, 1781-1840)

# 索　引

## あ 行

## か　行



## さ　行

## た 行

## な　行



## は　行



## ま　行

## や 行



## ら 行

## 青本 和彦

あおもと・かずひこ

略 歴

1961年　東京大学理学部数学科卒業
　　　　名古屋大学教授を経て

現　在　名古屋大学名誉教授　理学博士

主な著書　『微分と積分1』(岩波書店)
　　　　『現代数学の広がり1』(共著，岩波書店)
　　　　『現代数学の流れ2』(共著，岩波書店)
　　　　『超幾何関数論』(共著，シュプリンガー・ジャパン)
　　　　など．



ちょっこうたこうしきにゅうもん

# 直交多項式入門

2013年 4 月 10 日　第1版第1刷発行

著者　青本和彦

発行者　横山 伸

発行　有限会社　数学書房

〒101-0051　東京都千代田区神田神保町1-32-2
TEL　03-5281-1777
FAX　03-5281-1778
mathmath@sugakushobo.co.jp
http://www.sugakushobo.co.jp
振替口座　00100-0-372475

印刷
製本　モリモト印刷

組版　アベリー

装幀　岩崎寿文





ISBN 978-4-903342-72-6